Öğrenci Bilgileri

Numarası

Adı Soyadı

Fakülte

Bölüm

Oturum Bilgileri

Yerleşke

Salon

Bina

Sıra No

Sorular

1- (*i*) $y = f(x)$ fonksiyonu her noktada türevlenebilir,

(*ii*) $y = -2x + 3$ doğrusu $y = f(x)$ in grafiğine $x = -1$ noktasında teğet ve

(*iii*) f bire- bir olduğuna göre;

a) (6P) $f(-1) = ?$ $\quad -2(-1)+3 = 2+3 = \boxed{5}$

$y=-2x+3$ doğrusu $y=f(x)$ in grafiğine $x=-1$ noktasında teğet olduğundan $f(-1)$ ile $x=-1$ deki $y=-2x+3$ ün değerleri aynı olur.

b) (6P) $f'(-1) = ?$ $\quad \boxed{-2}$

$f'(-1)$, $x=-1$ deki teğetin eğimine eşittir.

Teğet $y=\boxed{-2}x+3$ olduğundan $f'(-1)=-2$ dir.

c) (6P) $\lim\limits_{h\to 0} \dfrac{f(h-1)-5}{2h} = ?$

$$= \frac{1}{2} \lim_{h\to 0} \frac{f(-1+h)-f(-1)}{h} = \frac{1}{2} f'(-1) = \frac{1}{2}(-2) = \boxed{-1}$$

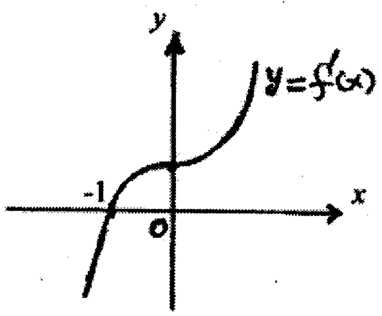
d) (6P) f nin artan ya da azalan olup olmadığını araştırınız. Cevabınızı açıklayınız.

f fonksiyonu her noktada türevlenebildiğinden sürekli<u>dir</u>.

f, 1-1 olduğundan tanım kümesi üzerinde ya artandır ya da azalandır.

$f'(-1) < -2$ olduğundan, f 'nin bire-birliğinden f her yerde azalan dır.

2-



$f(x)$ in f' türev fonksiyonunun grafiği şekildeki gibidir. Buna göre cevaplarınızı açıklayarak;

a) (4P) f nin artan ve azalan olduğu aralıkları belirleyiniz. f' nün grafiğinden;

$(-\infty,-1)$ aralığında $f'(x)<0$ olup $(-\infty,-1)$ de f azalan,

$(-1,\infty)$ aralığında $f'(x)>0$ olduğundan $(-1,\infty)$ da f artan olur.

b) (4P) f nin varsa yerel maksimum ve yerel minimum noktalarını belirleyiniz.

x	$-\infty$	-1	∞
$f'(x)$	$-$		$+$
$f(x)$	$\searrow$	y.min.	$\nearrow$

Grafikten; her yerde $f'(x)$ var.

$f'(x)=0 \Leftrightarrow x=-1$

$x=-1$ noktası f'nin yerel minimum noktasıdır.

f'nin yerel maksimum noktası yoktur.

c) (4P) f nin varsa mutlak maksimum ve mutlak minimum noktalarını bulunuz.

f, $x=-1$ in solunda azalan, sağında artandır.

f sürekli ve her yerde türevi vardır. ve tek bir nokta kritik noktasıdır. (b) şıkkından $x=-1$ noktası aynı zamanda mutlak minimum noktası olur.

d) (4P) f nin aşağı içbükey ya da yukarı içbükey olup olmadığını araştırınız.

Grafikten; f' nün her yerde artan olduğu anlaşılmaktadır.

O halde $f''(x)>0$ olur.

Buda f'nin heryerde yukarı doğru içbükey olduğunu gösterir.

e) (4P) $y=f(x)$ eğrisinin bir büküm noktası var mı? Neden?

f, heryerde yukarıdoğru içbükey olduğundan büküme noktası yoktur.

(Bükülme noktasının sağında ve solunda içbükeyliğin yönü bir birinin zıttı yönde olmalıdır.)

3- a) (8P) $\left|\frac{1}{1-x}\right|<1$ eşitsizliğini sağlayan x lerin kümesini bulunuz.

I. yol: $x \neq 1$ olmalı.

$\frac{1}{|1-x|}<1 \Leftrightarrow \frac{1}{|1-x|}<1 \Leftrightarrow 1<|1-x| \Leftrightarrow 1-x<-1$ veya $1<1-x$

$1-x<-1 \Rightarrow 2<x$ veya

$1<1-x \Rightarrow x<0$

Böylece istenen küme $\boxed{(-\infty,0)\cup(2,\infty)}$ olur.

II. yol:

$\frac{1}{|1-x|}<1 \Leftrightarrow 1<|1-x|$

$\Leftrightarrow 1<(1-x)^2$

$(|x|^2=x^2)$

$\Leftrightarrow 1<1-2x+x^2$

$\Leftrightarrow 0<x(-2+x)$

$\Leftrightarrow x_1=0,\ x_2=2.$

x		0		2	
$x(x-2)$	+		−		+

Ç.K $=(-\infty,0)\cup(2,\infty)$.

b) (8P) $f(x)=\ln\left(\frac{x}{x-1}\right)$ fonksiyonunun tanım kümesini bulunuz.

$x\neq 1$ ve $\frac{x}{x-1}>0$ olmalı.

$D(f)=(-\infty,0)\cup(1,\infty)$ dur.

x		0		1	
x	−		+		+
$x-1$	−		−		+
$\frac{x}{x-1}$	+		−		+

4- Eğer varsa aşağıdaki limitleri bulunuz.

a) (6P) $\lim_{x\to1}\left(\frac{1}{x-1}-\frac{2x+1}{\underbrace{x^2+x-2}_{(x-1)(x+2)}}\right)=\lim_{x\to1}\frac{x+2-2x-1}{(x-1)(x+2)}=\lim_{x\to1}\frac{1-x}{(x-1)(x+2)}$

$=\lim_{x\to1}-\frac{\cancel{(x-1)}}{\cancel{(x-1)}(x+2)}=\lim_{x\to1}-\frac{1}{x+2}=\boxed{-\frac{1}{3}}$

b) (6P) $\lim_{x\to0}\frac{|x|}{x+x^2}$

$\lim_{x\to0^+}\frac{|x|}{x+x^2}=\lim_{x\to0^+}\frac{\cancel{x}}{\cancel{x}(1+x)}=\lim_{x\to0^+}\frac{1}{1+x}=1$

$\lim_{x\to0^-}\frac{|x|}{x+x^2}=\lim_{x\to0^-}-\frac{\cancel{x}}{\cancel{x}(1+x)}=\lim_{x\to0^-}\frac{-1}{1+x}=-1$

$\lim_{x\to0^+}\frac{|x|}{x+x^2}\neq\lim_{x\to0^-}\frac{|x|}{x+x^2}$ olduğundan limit yoktur.

c) (6P) $\lim_{x\to0}\frac{\sin x-x}{\cos x-1}$ ($[\frac{0}{0}]$ belirsizliği var.)

$\overset{L'Hop}{=}\lim_{x\to0}\frac{\cos x-1}{-\sin x}\overset{L'Hop}{=}\lim_{x\to0}\frac{-\sin x}{-\cos x}=\frac{0}{-1}=\boxed{0}$

($[\frac{0}{0}]$ bel. var.)

d) (9P) $\lim_{x\to0}\left(e^x+x\right)^{2/x}$ ($[1^\infty]$ belirsizliği var.)

$y=(e^x+x)^{2/x}\Rightarrow \ln y=\frac{2}{x}\ln(e^x+x)$

$\lim_{x\to0}\ln y=\lim_{x\to0}2\frac{\ln(e^x+x)}{x}\overset{L'Hop}{=}\lim_{x\to0}\frac{\frac{2}{e^x+x}\cdot(e^x+1)}{1}$

($[\frac{0}{0}]$ bel. var).

$=\lim_{x\to0}\frac{2.(e^x+1)}{e^x+x}=\frac{4}{1}=4$ olur.

Buna göre

$\lim_{x\to0}\ln y=\ln(\lim_{x\to0}y)=4=\ln e^4\Rightarrow\lim_{x\to0}(e^x+x)^{2/x}=\boxed{e^4}$ bulunur.

(ln fonksiyonu sürekli)

5- a) (8P) $y^x + x^2 - 2y = 0$ ise $\frac{dy}{dx}$ türevinin $(1,1)$ noktasındaki değerini bulunuz.

$y^x + x^2 - 2y = 0 \Leftrightarrow e^{x \ln y} + x^2 - 2y = 0$ (x'e göre kapalı türevleme ile)

$e^{x \ln y} \cdot \left(\ln y + x \frac{1}{y} \cdot \frac{dy}{dx}\right) + 2x - 2\frac{dy}{dx} = 0$

(1,1) i yerine yazdığımızda

$e^{1 \cdot \ln 1} \cdot \left(\ln 1 + \frac{1}{1} \cdot \frac{dy}{dx}\right) + 2 - 2\frac{dy}{dx} = 0 \Rightarrow \frac{dy}{dx} + 2 - 2\frac{dy}{dx} = 0$

$\Rightarrow \left.\frac{dy}{dx}\right|_{(1,1)} = \boxed{2}$ bulunur.

b) (5P) $\frac{d}{dx}\left(\tan^{-1}(\cos x)\right) = ?$

$= \frac{1}{1+\cos^2 x}(-\sin x) = \boxed{-\frac{\sin x}{1+\cos^2 x}}$

c) (5P) $\frac{d}{dx} 2^{\ln x} = ?$ $= 2^{\ln x} \cdot \ln 2 \cdot \frac{1}{x} = \boxed{\frac{2^{\ln x} \cdot \ln 2}{x}}$

d) (5P) $\int \frac{2^{\ln x}}{x} dx = ?$. (c) şıkkından $\frac{d}{dx} 2^{\ln x} = \frac{2^{\ln x} \cdot \ln 2}{x}$

olduğunu biliyoruz. Buna göre

$\frac{d}{dx}\left(\frac{2^{\ln x}}{\ln 2}\right) = \frac{2^{\ln x}}{x \cdot \cancel{\ln 2}} \cancel{\ln 2} = \frac{2^{\ln x}}{x}$

olacağından, integral ile ters türev (ilkel) ilişkisinden

$\int \frac{2^{\ln x}}{x} dx = \boxed{\frac{2^{\ln x}}{\ln 2} + c}$ olur.