Öğrenci Bilgileri

Numarası

Adı Soyadı

Fakülte

Bölüm

Oturum Bilgileri

Yerleşke

Bina

Salon

Sıra No

Sorular

SÜRE: 90 dk.

MAT-102 MATEMATİK-II DERSİ II. ARA SINAVI

BAŞARILAR

1	2	3	4	5	Toplam	GİRMEDİ

İmza:

1-

a) (12P) $f(x,y,z)=x^2y+x\sqrt{1+z}$ **fonksiyonunun** $(1,2,3)$ **noktasında** $\mathbf{v}=2\mathbf{i}+\mathbf{j}-2\mathbf{k}$ **vektörü yönündeki yönlü türevi bulunuz.**

$|v|=\sqrt{9}=3$ olduğundan birim vektör değildir.
v yönündeki birim vektör.
$u=\frac{v}{|v|}=\frac{2}{3}i+\frac{1}{3}j-\frac{2}{3}k$ olur. Buna göre v vektörü yönünde $(1,2,3)$ noktasındaki yönlü türev.

$D_u f(1,2,3)=\frac{v}{|v|}\bullet\nabla f(1,2,3)$ $\left(\begin{array}{l}\nabla f(x,y,z)=(2xy+\sqrt{1+z})i+x^2j+\frac{x}{2\sqrt{1+z}}k\\ \nabla f(1,2,3)=6i+j+\frac{1}{4}k\end{array}\right)$

$=\left(\frac{2}{3}i+\frac{1}{3}j-\frac{2}{3}k\right)\bullet\left(6i+j+\frac{1}{4}k\right)$

$=\frac{2}{3}\cdot 6+\frac{1}{3}\cdot 1-\frac{2}{3}\cdot\frac{1}{4}=\boxed{\frac{25}{6}}$ bulunur.

b) (12P) $\begin{cases}u=x^3y-y^2+x\\ v=3xy-x^2\end{cases}$ **denklem sistemi veriliyor.** $x=-1,\ y=1$ **olduğu noktada** $\left(\frac{\partial x}{\partial u}\right)_v=?$ $\left(\frac{\partial y}{\partial u}\right)_v=?$

$\left.\begin{array}{l}x=x(u,v)\\ y=y(u,v)\end{array}\right\}$ olarak alıyoruz. Buna göre.

I. denklemden (u ya göre türev alınırsa)

$1=3x^2y\cdot\frac{\partial x}{\partial u}+x^3\cdot\frac{\partial y}{\partial u}-2y\frac{\partial y}{\partial u}+\frac{\partial x}{\partial u}$

$\Rightarrow 1=(3x^2y+1)\frac{\partial x}{\partial u}+(x^3-2y)\frac{\partial y}{\partial u}$

II. denklemden (u'ya göre türev alınırsa)

$0=3y\frac{\partial x}{\partial u}+3x\frac{\partial y}{\partial u}-2x\frac{\partial x}{\partial u}=(3y-2x)\frac{\partial x}{\partial u}+3x\frac{\partial y}{\partial u}$

$(x,y)=(-1,1)$ de yerine yazarak.

$\left.\begin{array}{l}1=4\frac{\partial x}{\partial u}-3\frac{\partial y}{\partial u}\\ 0=5\frac{\partial x}{\partial u}-3\frac{\partial y}{\partial u}\end{array}\right\}\Rightarrow \left.\begin{array}{l}1=4\frac{\partial x}{\partial u}-3\cancel{\frac{\partial y}{\partial u}}\\ 0=-5\frac{\partial x}{\partial u}+\cancel{3}\cancel{\frac{\partial y}{\partial u}}\end{array}\right\}\Rightarrow -\frac{\partial x}{\partial u}=1\Rightarrow\frac{\partial x}{\partial u}=-1.$

ve $\frac{\partial y}{\partial u}=-\frac{5}{3}$. Böylece $(-1,1)$ noktasında

$\left(\frac{\partial x}{\partial u}\right)_v=-1$ ve $\left(\frac{\partial y}{\partial u}\right)_v=-\frac{5}{3}$

2- $f(x,y)=x^2-y^2$ **fonksiyonu veriliyor.**

a) (6P) f **nin kritik noktalarını bulunuz.**

$$\left.\begin{array}{l} f_1(x,y)=2x=0 \Rightarrow x=0 \\ f_2(x,y)=-2y=0 \Rightarrow y=0 \end{array}\right\} \Rightarrow (x,y)=(0,0) \text{ noktası}$$

f'nin kritik noktası olur.

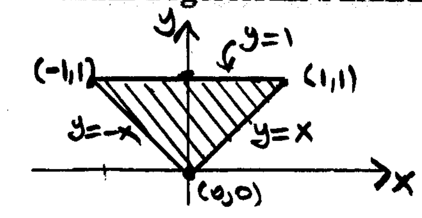
b) (8P) f **nin kritik noktasının, yerel maksimum ya da yerel minimum ya da eyer noktası olup olmadığını araştırınız.**

$f_{11}(x,y)=2$, $f_{22}=-2$ ve $f_{12}(x,y)=f_{21}(x,y)=0$.

$[f_{12}(0,0)]^2-f_{11}(0,0).f_{22}(0,0)=0-2.(-2)=4>0$.

olduğun $(0,0)$ f'nin eyer noktasıdır.

c) (10P) Köşe noktaları (0,0), (-1,1), (1,1) olan üçgen üzerindeki f **nin maksimum ve minimum değerlerini bulunuz.**



(0,0) kritik noktası üçgenin sınırında olup $f(0,0)=0$ dır.
(Üçgenin içinde f'nin hiçbir kritik noktası yoktur)

$y=1$ doğrusu üzerinde ; $(-1\leq x\leq 1)$

$f(x,1)=x^2-1$ olup $-1\leq x\leq 1$ için f'nin alacağı en büyük değer 0, en küçük değer -1 dir.

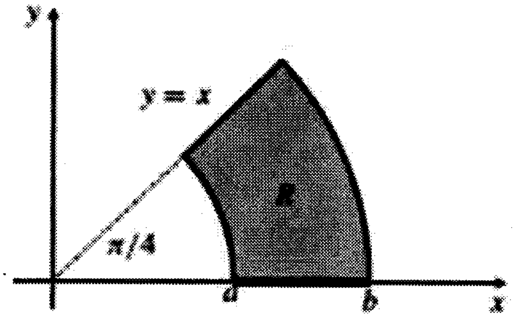
$(g(x)=x^2-1 \Rightarrow g(-1)=g(1)=0$ ve $g'(x)=2x=0 \Rightarrow g(0)=-1$ dir.)

$y=x$ ve $y=-x$ doğruları üzerindeki noktalarda.

$f(x,y)=0$ değerini alır.

Buna göre f'nin bu bölge üzerinde aldığı maksimum değer $\boxed{0}$ ve minimum değerde $\boxed{-1}$ olur.

3- a) (12P)



R; **Şekildeki gibi birinci çeyrek düzlemde** $y = x$ **doğrusu altında kalan** $4 \le x^2 + y^2 \le 16$ **halkasının parçası ise**

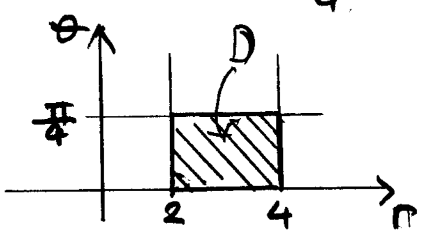
$$\iint_R \tan^{-1}\left(\frac{y}{x}\right) dA = ?$$

$(a = 2, b = 4)$

Kutupsal koordinatlarda

$\left.\begin{array}{l} x = r\cos\theta \\ y = r\sin\theta \end{array}\right\} \Rightarrow dA = r\,dr\,d\theta$

ve $2 \le r \le 4$
$0 \le \theta \le \frac{\pi}{4}$ olur.



$$= \iint_D \tan^{-1}\left(\frac{\cancel{r}\sin\theta}{\cancel{r}\cos\theta}\right) r\,dr\,d\theta$$

$$= \iint_D \tan^{-1}(\tan\theta)\, r\,dr\,d\theta$$

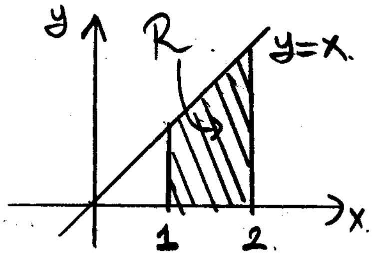
$$= \iint_D \theta\, r\,dr\,d\theta.$$

$$= \int_0^{\pi/4} \theta\,d\theta \int_2^4 r\,dr = \int_0^{\pi/4} \left(\frac{r^2}{2}\Big|_2^4\right) \theta\,d\theta$$

$$= \cancel{6}\,3 \int_0^{\pi/4} \theta\,d\theta = \cancel{6}\,3 \cdot \frac{\theta^2}{\cancel{2}}\Big|_0^{\pi/4} = \boxed{\frac{3\pi^2}{16}} \text{ bulunur.}$$

b) (12P) R; $0 \le y \le x$ **ve** $1 \le x \le 2$ **ile verilen bölge olduğuna göre**

$$\iint_R \frac{y\sin x}{x^2} dA = ? \quad = \int_1^2 \frac{\sin x}{x^2} dx \int_0^x y\,dy = \int_1^2 \left(\frac{y^2}{2}\Big|_0^x\right) \frac{\sin x}{x^2}\,dx$$



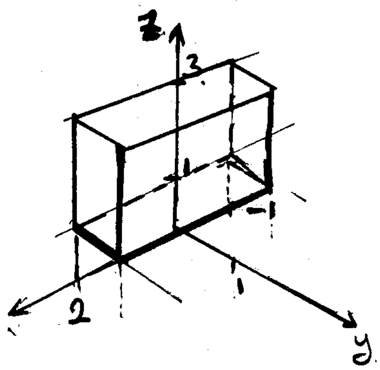
$$= \int_1^2 \frac{\cancel{x^2}}{2} \frac{\sin x}{\cancel{x^2}}\,dx = \frac{1}{2}\int_1^2 \sin x\,dx.$$

$$= \frac{1}{2}\left(-\cos x\Big|_1^2\right) = \frac{1}{2}\left(-\cos 2 + \cos 1\right)$$

$$= \boxed{\frac{1}{2}\left[\cos 1 - \cos 2\right]} \text{ olur.}$$

4- **a) (12P)** $D;\ -1 \le x \le 2,\ 0 \le y \le 1,\ 1 \le z \le 3$ **ile belirli bölge olduğuna göre**

$\iiint\limits_D xz\,dV = ?$ $\quad \int_{-1}^{2} dx \int_0^1 dy \int_1^3 xz\,dz = \int_{-1}^{2} x\,dx \int_0^1 dy \int_1^3 z\,dz.$



$$= \int_{-1}^{2} x\,dx \int_0^1 \left(\frac{z^2}{2}\Big|_1^3\right) dy$$

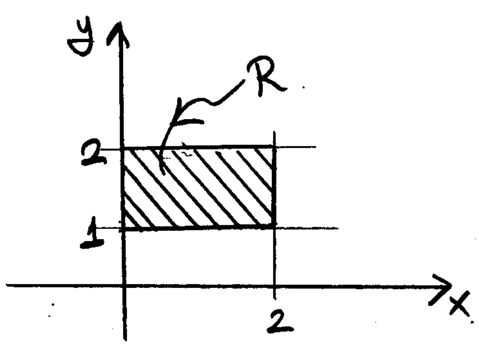
$$= \int_{-1}^{2} x\,dx \int_0^1 \underbrace{\left(\frac{9}{2} - \frac{1}{2}\right)}_{\frac{8}{2}=4} dy.$$

$$= 4 \int_{-1}^{2} x\,dx$$

$$= 4 \cdot \left(\frac{x^2}{2}\Big|_{-1}^{2}\right) = 4.\left(\frac{4}{2} - \frac{1}{2}\right)$$

$$= \frac{12}{2} = \boxed{6}$$

b) (12P) $0 \le x \le 2,\ 1 \le y \le 2$ **ile verilen** R **bölgesi üstünde ve** $z = \dfrac{x}{y}$ **yüzeyinin altında kalan katı cismin hacmini bulunuz.**



$$V = \iint\limits_R \frac{x}{y}\,dA.$$

$$= \int_1^2 \frac{1}{y}\,dy \int_0^2 x\,dx$$

$$= \int_1^2 \left(\frac{x^2}{2}\Big|_0^2\right) \frac{1}{y}\,dy.$$

$$= 2\int_1^2 \frac{1}{y}\,dy = 2(\ln y)\Big|_1^2 = 2(\ln 2 - \cancel{\ln 1}^{\,0})$$

$$= 2\ln 2 = \boxed{\ln 4}\ \text{br}^3.\ \text{olur.}$$

5- **a) (12P)** Aşağıda verilen ifadelerin **doğru** ya da **yanlış** olup olmadığını belirleyiniz.

(i) $f_{12}(a,b)=0$ **ise** (a,b) f **nin eyer noktasıdır.** (YANLIŞ..)

(ii) $\int_0^1 dx \int_x^2 f(x,y)dy = \int_2^x dy \int_0^1 f(x,y)dx$ **eşitliği doğrudur.** (YANLIŞ..)

(iii) $\iint_{x^2+y^2\leq 4} \frac{dA}{x^2+y^2}$ **bir has olmayan integraldir.** (DOĞRU)

(iv) **Silindirik koordinatlarda** $dV = rdrd\theta dz$ **dir.** (DOĞRU..)

b) (12P) Aşağıdaki boşlukları doldurunuz.

(i) $\nabla f(x,y) = (3x + \sin y)\mathbf{i} - \ln(x+y)\mathbf{j}$ **olduğuna göre**

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 3x+\sin y \quad \textbf{ve} \quad \frac{\partial f}{\partial y} = -\ln(x+y) \quad \textbf{dir.}$$

(ii) $$\int_0^1 dx \int_0^2 dy \int_x^1 f(x,y)dz = \int_0^1 dz \int_0^2 dy \int_0^2 f(x,y)dx$$

(iii) $$\iint_{x^2+y^2\le 4} dA = 4\pi \quad \textbf{dir.}$$

(iv) (a,b) $f(x,y)$ **nin bir kritik noktası**

$$f_{11}(a,b) = 2, \quad f_{22}(a,b) = 1, \quad f_{12}(a,b) = 0$$

olduğuna göre (a,b), f **nin yerel** minimum **noktasıdır.**