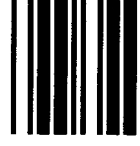


Öğrenci Bilgileri

Numarası
Adı Soyadı
Fakülte
Bölüm



Oturum Bilgileri

Yerleşke Salon
Bina Sıra No

Sorular

SÜRE: 90 dk.

MAT-101 MATEMATİK -I DERSİ FİNAL SINAVI

BAŞARILAR

1	2	3	4	5	Toplam	GİRMEDİ

İmza:

1-

a) (12P) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan x}{\sqrt{4 + \tan x} - 2} = ?$ ($\frac{0}{0}$ belirsizliği var)

I. Yol:

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan x (\sqrt{4 + \tan x} + 2)}{(\sqrt{4 + \tan x} - 2)(\sqrt{4 + \tan x} + 2)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan x (\sqrt{4 + \tan x} + 2)}{\cancel{4 + \tan x} - 4}$$
$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cancel{\tan x} (\sqrt{4 + \tan x} + 2)}{\cancel{\tan x}} = \lim_{x \rightarrow 0} \sqrt{4 + \tan x} + 2$$
$$= \sqrt{4 + \underbrace{\lim_{x \rightarrow 0} \tan x}_0} + 2 = \sqrt{4} + 2 = \boxed{4}$$

II. Yol: (L'Hop)

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cancel{\sec^2 x}}{\frac{\sec^2 x}{2\sqrt{4 + \tan x}}} = \lim_{x \rightarrow 0} 2\sqrt{4 + \tan x} = 2\sqrt{4} = \boxed{4}$$

b) (12P)

$$f(x) = \begin{cases} \frac{\sin ax}{x} & : x < 0 \\ 2 & : x = 0 \\ b \cos x + 1 & : x > 0 \end{cases}$$

fonksiyonunun $x = 0$ noktasında sürekli olması için a ve b ne olmalıdır? Bulunuz.

$x = 0$ da sürekli olması için.

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = f(0) \text{ olmalıdır.}$$

Buna göre.

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin ax}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} a \frac{\sin ax}{ax} \stackrel{(u=ax \Rightarrow \begin{matrix} x \rightarrow 0 \\ u \rightarrow 0 \end{matrix})}{=} a \lim_{u \rightarrow 0} \frac{\sin u}{u} = a$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} b \cos x + 1 = b \cdot \underbrace{\cos 0}_1 + 1 = b + 1$$

$$\Rightarrow a = f(0) = 2 = b + 1 \text{ olmalı}$$

Buradan $\boxed{a=2}$ ve $2 = b + 1 \Rightarrow \boxed{b=1}$ bulunur.

2- a) (12P) $y = x^{\sin x} + 3^x$ ise $y' = ?$

$$y' = \frac{d}{dx}(x^{\sin x}) + \frac{d}{dx}(3^x) = x^{\sin x} \left(\cos x \ln x + \frac{\sin x}{x} \right) + 3^x \cdot \ln 3$$

$$\left(z = x^{\sin x} \text{ dersek } \ln z = \sin x \ln x \Rightarrow \frac{1}{z} \cdot z' = \cos x \ln x + \frac{\sin x}{x} \Rightarrow z' = x^{\sin x} \left(\cos x \ln x + \frac{\sin x}{x} \right) \right)$$

veya $y = x^{\sin x} + 3^x \Rightarrow y = e^{\sin x \ln x} + 3^x$ dir.

$$\Rightarrow y' = e^{\sin x \ln x} \cdot \left(\cos x \ln x + \frac{\sin x}{x} \right) + 3^x \ln 3$$

$$= x^{\sin x} \left(\cos x \ln x + \frac{\sin x}{x} \right) + 3^x \ln 3 \quad \text{dur.}$$

b) (12P)

$$f(x) = \begin{cases} e^{2x} & : x \leq 2 \\ 2x+3 & : 2 < x \end{cases} \quad \text{olduğuna göre } \int_0^5 f(x) dx = ?$$

$$\int_0^5 f(x) dx = \int_0^2 f(x) dx + \int_2^5 f(x) dx = \int_0^2 e^{2x} dx + \int_2^5 (2x+3) dx$$

$$= \left(\frac{e^{2x}}{2} \Big|_0^2 \right) + \left(x^2 + 3x \Big|_2^5 \right)$$

$$= \frac{e^4}{2} - \frac{e^0}{2} + 5^2 + 3 \cdot 5 - 2^2 - 3 \cdot 2$$

$$= \frac{1}{2} (e^4 - 1) + 30$$

3-

(a) (12P) $\int \frac{x+5}{x^2+x-2} dx = ?$

$$\frac{x+5}{x^2+x-2} = \frac{x+5}{(x+2)(x-1)} = \frac{A}{x+2} + \frac{B}{x-1} = \frac{A(x-1) + B(x+2)}{(x+2)(x-1)}$$

$$\left. \begin{array}{l} A+B=1 \\ -A+2B=5 \end{array} \right\} \Rightarrow \begin{array}{l} 3B=6 \Rightarrow \boxed{B=2} \\ A+2=1 \Rightarrow \boxed{A=-1} \end{array}$$

$$\begin{aligned} \int \frac{x+5}{x^2+x-2} dx &= \int \frac{-1}{x+2} dx + \int \frac{2}{x-1} dx \\ &= -\ln|x+2| + 2 \cdot \ln|x-1| + C \\ &= \ln(x-1)^2 - \ln|x+2| + C \\ &= \boxed{\frac{\ln(x-1)^2}{|x+2|} + C} \end{aligned}$$

b) (12P) $\int_e^{\infty} \frac{2}{x(\ln x)^3} dx$ integrali yakınsak mıdır? Yakınsak ise değerini bulunuz.

$$= \lim_{R \rightarrow \infty} \int_e^R \frac{2}{x(\ln x)^3} dx = \lim_{R \rightarrow \infty} \int_1^{\ln R} \frac{2}{u^3} du \quad \left(\begin{array}{l} p=3 > 1 \text{ old.} \\ p\text{-testinden} \\ \text{int. yakınsak} \end{array} \right)$$

$$\left(\begin{array}{l} u = \ln x \Rightarrow du = \frac{1}{x} dx \\ x = e \Rightarrow u = 1 \\ x = R \Rightarrow u = \ln R \end{array} \right) = 2 \lim_{R \rightarrow \infty} \int_1^{\ln R} u^{-3} du = 2 \cdot \lim_{R \rightarrow \infty} \left(\frac{u^{-2}}{-2} \Big|_1^{\ln R} \right) = \frac{2}{-2} \lim_{R \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{u^2} \Big|_1^{\ln R} \right)$$

$$= -\lim_{R \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{(\ln R)^2} - 1 \right)$$

$$= -\underbrace{\lim_{R \rightarrow \infty} \frac{1}{(\ln R)^2}}_{=0} + 1 = \boxed{1} \text{ bulunur.}$$

4

a) (12P) $y = \frac{1}{8}x^2 - \ln x$ eğrisinin $x=1$ den $x=e$ ye kadar olan yay uzunluğunu bulunuz.

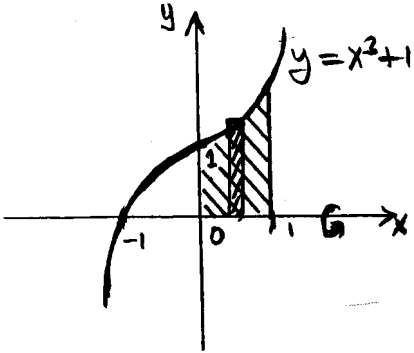
$$\frac{dy}{dx} = \frac{2}{8}x - \frac{1}{x} = \frac{x}{4} - \frac{1}{x}$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow 1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2 &= 1 + \left(\frac{x}{4} - \frac{1}{x}\right)^2 = 1 + \frac{x^2}{16} - 2 \cdot \frac{x}{4} \cdot \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2} \\ &= 1 + \left(\frac{x}{4}\right)^2 - \frac{1}{2} + \frac{1}{x^2} = \left(\frac{x}{4}\right)^2 + \frac{1}{2} + \frac{1}{x^2} = \left(\frac{x}{4} + \frac{1}{x}\right)^2 \end{aligned}$$

$$s = \int_1^e \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2} dx = \int_1^e \sqrt{\left(\frac{x}{4} + \frac{1}{x}\right)^2} dx = \int_1^e \left|\frac{x}{4} + \frac{1}{x}\right| dx$$

$$\begin{aligned} \left(1 \leq x \leq e \text{ için } \frac{x}{4} + \frac{1}{x} > 0\right) \Rightarrow \int_1^e \left(\frac{x}{4} + \frac{1}{x}\right) dx &= \left(\frac{x^2}{8} + \ln x\right) \Big|_1^e = \frac{e^2}{8} + \ln e - \frac{1}{8} - \ln 1 \\ &= \frac{e^2 - 1}{8} + 1 = \boxed{\frac{e^2 + 7}{8}} \text{ br.} \end{aligned}$$

b) (12P) $y = x^3 + 1$ eğrisi ile x - eksenini, $x=0$ ve $x=1$ doğruları ile sınırlı bölgenin x - eksenini etrafında döndürülmesi ile oluşan cismin hacmini bulunuz.



$$\begin{aligned} \Delta V_x &= \pi [f(x)]^2 \Delta x \\ &= \pi (x^3 + 1)^2 \Delta x \end{aligned}$$

$$V = \pi \int_0^1 (x^3 + 1)^2 dx = \pi \int_0^1 (x^6 + 2x^3 + 1) dx$$

$$= \pi \left(\frac{x^7}{7} + \frac{2x^4}{4} + x \right) \Big|_0^1 = \pi \left(\frac{1}{7} + \frac{1}{2} + 1 - 0 \right)$$

$$= \boxed{\frac{23}{14} \pi} \text{ br}^2 \text{ olur.}$$

5-

a) (12P) Aşağıda verilen ifadelerin doğru yada yanlış olup olmadığını belirleyiniz.

(i) $\log_2^3(x+1) = 3 \log_2(x+1)$ (YANLIŞ)

(ii) f tek fonksiyon ise $\int_{-2}^0 f(x) dx = -\int_0^2 f(x) dx$ dir. (DOĞRU)

(iii) $\int 7^x dx = \frac{7^{x+1}}{x+1} + C$ (YANLIŞ)

(iv) $f(x) = \begin{cases} x = 2 \sin \theta \\ y = 3 \cos \theta \end{cases} (0 \leq \theta \leq 2\pi),$
parametrik eğrisi bir elipsi gösterir. (DOĞRU)

b) (12P) $f(x) = \begin{cases} x^2 & : x < 0 \\ 2 & : 0 \leq x < 1 \\ \sqrt{x} + 1 & : 1 \leq x \end{cases}$ olduğuna göre,

(i) $\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = \dots 2 \dots$ dir.

(ii) f , $x=0$ noktasında(noktalarında) sürekli değildir.

(iii) f , $x=0, x=1$ noktasında(noktalarında) türevlenemez.

(iv) f nin grafiği $(1, \infty)$ aralığında aşağı doğru iç bükeydir.