MAT-102 MATEMATİK -II DERSİ II. ARA SINAVI

Sınav Süresi : 90 dk. **BAŞARILAR**

1	2	3	4	5	Toplam

1- a) (12P) $f(x,y)$ **türevlenebilir fonksiyonu veriliyor.**
$\mathbf{u}=\frac{1}{\sqrt{2}}(\mathbf{i}-\mathbf{j})$ **ve** $\mathbf{v}=\frac{1}{\sqrt{5}}(2\mathbf{i}+\mathbf{j})$ **olmak üzere** $D_{\mathbf{u}}f(a,b)=2\sqrt{2}$ **ve** $D_{\mathbf{v}}f(a,b)=3\sqrt{5}$ **olduğuna göre** $\nabla f(a,b)$ **yi bulunuz.**

$$D_u f(a,b)=\left(\frac{\hat{i}}{\sqrt{2}}-\frac{\hat{j}}{\sqrt{2}}\right)\cdot\left(f_1(a,b)\hat{i}+f_2(a,b)\hat{j}\right)=\frac{f_1(a,b)}{\sqrt{2}}-\frac{f_2(a,b)}{\sqrt{2}}=2\sqrt{2}$$

$$\Leftrightarrow f_1(a,b)-f_2(a,b)=4 \quad \ldots (1)$$

$$D_v f(a,b)=\left(\frac{2}{\sqrt{5}}\hat{i}+\frac{\hat{j}}{\sqrt{5}}\right)\cdot\left(f_1(a,b)\hat{i}+f_2(a,b)\hat{j}\right)=\frac{2}{\sqrt{5}}f_1(a,b)+\frac{1}{\sqrt{5}}f_2(a,b)=3\sqrt{5}$$

$$\Leftrightarrow 2f_1(a,b)+f_2(a,b)=15 \quad \ldots (2).$$

(1) ve (2) den $3f_1(a,b)=19 \Rightarrow f_1(a,b)=\frac{19}{3}$.
ve $f_2(a,b)=\frac{19}{3}-4=\frac{7}{3}$ bulunur. Buna göre

$$\boxed{\nabla f(a,b)=\frac{19}{3}\hat{i}+\frac{7}{3}\hat{j}}$$ olur.

b) (12P) $\begin{cases} x\ln z+uy-\sin v=1 \\ v\cos y+ux^2-e^y z=2 \end{cases}$ **denkleminin** $P=(x,y,z,u,v)=(1,0,2,1,0)$ **noktası yakınlarında** x,y **ve** z **nin fonksiyonları olarak** u **ve** v **ye göre çözülebileceğini gösteriniz.** P **noktasında** $\left(\frac{\partial u}{\partial z}\right)_{x,y}$ **yi bulunuz.**

$$\left.\begin{aligned} F(x,y,z,u,v)&=x\ln z+uy-\sin v-1 \\ G(x,y,z,u,v)&=v\cos y+ux^2-e^y z-2 \end{aligned}\right\} \text{ diyelim.}$$

$$\frac{\partial(F,G)}{\partial(u,v)}=\left.\begin{vmatrix} \frac{\partial F}{\partial u} & \frac{\partial F}{\partial v} \\ \frac{\partial G}{\partial u} & \frac{\partial G}{\partial v}\end{vmatrix}\right|_P=\left.\begin{vmatrix} y & -\cos v \\ x^2 & \cos y\end{vmatrix}\right|_P=\begin{vmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 1\end{vmatrix}=1\neq 0.$$

olduğundan $F=0$ ve $G=0$ denklemleri P noktası yakınlarında x,y,z nin fonksiyonları olarak u ve v ye göre çözülebilirler.

$$\left.\left(\frac{\partial u}{\partial z}\right)_{x,y}\right|_P=-\left.\frac{\frac{\partial(F,G)}{\partial(z,v)}}{\frac{\partial(F,G)}{\partial(u,v)}}\right|_{P_0}=-\left.\frac{\partial(F,G)}{\partial(z,v)}\right|_P=-\left.\begin{vmatrix} \frac{x}{z} & -\cos v \\ -e^y & \cos y\end{vmatrix}\right|_P$$

$$=-\begin{vmatrix} \frac{1}{2} & -1 \\ -1 & 1\end{vmatrix}=-\left(\frac{1}{2}-1\right)=\boxed{\frac{1}{2}}$$

2- $f(x,y) = x(x+y-1)$ **fonksiyonu veriliyor.**

a) (6P) f **nin kritik noktalarını bulunuz.**

$f(x,y) = x(x+y-1) = x^2+xy-x.$

$$\left.\begin{aligned} f_1(x,y) &= 2x+y-1 = 0 \\ f_2(x,y) &= x = 0 \end{aligned}\right\} \Rightarrow y=1$$

$(0,1)$ f'nin kritik noktasıdır.

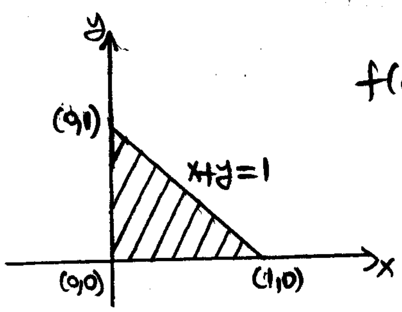
b) (8P) f **nin kritik noktasının yerel maksimum yada yerel minimum yada eyer noktası olup olmadığını araştırınız.**

$f_{11}(x,y) = 2$, $f_{22}(x,y)=0$, $f_{12}(x,y) = f_{21}(x,y) = 1.$

$[f_{12}(0,1)]^2 - f_{11}(0,1).f_{22}(0,1) = 1-0 = 1 > 0$ olduğundan

$(0,1)$ noktası f'nin eyer noktasıdır.

c) (10P) Köşe noktaları (0,0), (0,1), (1,0) olan üçgen üzerindeki f **nin maksimum ve minimum değerlerini bulunuz.**



$(0,1)$ kritik noktası üçgenin sınırında olup $f(0,1)=0$ dır. (Üçgenin içinde f'nin hiç bir kritik noktası yok.

$y=1-x$ doğrusu üzerinde ; $0 \le x \le 1$

$f(x,1-x) = x(x+1-x-1) = 0$ dır.

$x=0$ doğrusu üzerinde ; $0 \le y \le 1$

$f(0,y) = 0$ dır.

$y=0$ doğrusu üzerinde ; $0 \le x \le 1$

$f(x,0) = x(x-1) = x^2-x = (x-\frac{1}{2})^2 - \frac{1}{4}$

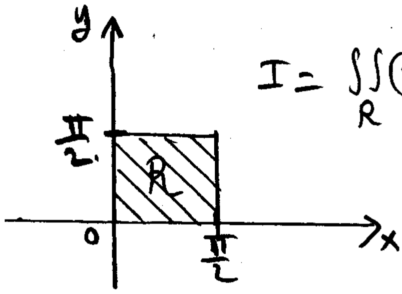
$g(x) = x^2-x$ dersek $\Rightarrow g'(x) = 2x-1 \Rightarrow g'(x)=0 \Leftrightarrow x=\frac{1}{2}$

$\frac{1}{2}$, $[0,1]$ üz. g'nin kritik noktası olur.

$g(\frac{1}{2}) = -\frac{1}{4}$ ve ayrıca uç noktalarda $g(0) = g(1) = 0$ dır.

Sonuç olarak; f'nin bölge üzerinde minimum değeri $\boxed{-\frac{1}{4}}$ ve maksimum değeri $\boxed{0}$ olur.

3- a) (12P) $R;\ 0\le x\le \pi/2,\ 0\le y\le \pi/2$ **olmak üzere** $\iint_R(\sin x+4xy)dA=?$



$$I=\iint_R(\sin x+4xy)\,dA=\int_0^{\pi/2}dx\int_0^{\pi/2}(\sin x+4xy)\,dy$$

$$=\int_0^{\pi/2}\left(y\sin x+2xy^2\Big]_0^{\pi/2}\right)dx=\int_0^{\pi/2}\left(\frac{\pi}{2}\sin x+\frac{x\pi^2}{2}\right)dx.$$

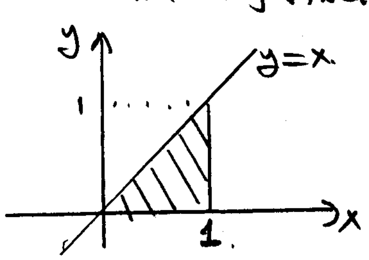
$$=\left(-\frac{\pi}{2}\cos x+\frac{x^2}{4}\pi^2\right]_0^{\pi/2}=-\frac{\pi}{2}\cancel{\cos\frac{\pi}{2}}+\frac{\pi^2}{16}\pi^2+\frac{\pi}{2}\cos 0$$

$$=\boxed{\frac{\pi^4}{16}+\frac{\pi}{2}}$$

veya $I=\int_0^{\pi/2}dy\int_0^{\pi/2}(\sin x+4xy)\,dx$

b) (12P) $\int_0^1 dy\int_y^1 e^{-x^2}dx=?$

integrali alamayız.
Sıra değiştirelim.



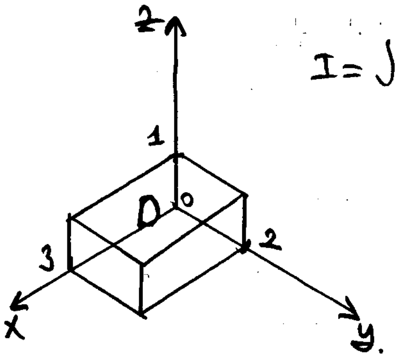
$$\int_0^1 dy\int_y^1 e^{-x^2}dx=\int_0^1 dx\int_0^x e^{-x^2}dy=\int_0^1\left(y.e^{-x^2}\Big]_{y=0}^x\right)dx$$

$$=\int_0^1 x e^{-x^2}dx=-\frac{1}{2}\int_0^{-1}e^u du=\frac{1}{2}\int_{-1}^0 e^u du.$$

$$\left(\begin{array}{l}u=-x^2\Rightarrow du=-2x\,dx\\ \qquad\Rightarrow -\frac{du}{2}=x\,dx\\ x=0\Rightarrow u=0\\ x=1\Rightarrow u=-1\end{array}\right)=\frac{1}{2}e^u\Big|_{-1}^0=\frac{1}{2}(e^0-e^{-1})$$

$$=\boxed{\frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{e}\right)}$$

4-a) (12P) $D;\ 0\le x\le 3,\ 0\le y\le 2,\ 0\le z\le 1$ **olmak üzere** $\iiint_D(3-z)dV=?$



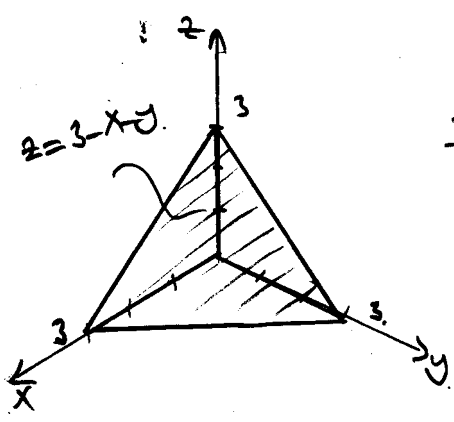
$$I=\iiint_D(3-z)\,dV=\int_0^3dx\int_0^2dy\int_0^1(3-z)\,dz$$

$$=\int_0^3dx\int_0^2dy\left(3z-\frac{z^2}{2}\Big]_0^1\right)$$

$$=(3-0)\times(2-0)\times\left(3-\frac{1}{2}\right)=3\times2\times\frac{5}{2}=\boxed{15}$$

b) (12P) $I=\int_0^3 dx\int_0^{3-x}dy\int_0^{3-x-y}f(x,y,z)\,dz$ **integralinin integral bölgesini çiziniz ve sırası değiştirilmiş** $I=\int dy\int dz\int f(x,y,z)dx$ **integralinin sınırlarını belirleyiniz.**

$0\le x\le 3,\quad 0\le y\le 3-x,\quad 0\le z\le 3-x-y$



$$I=\int_0^3dy\int_0^{3-y}dz\int_0^{3-y-z}f(x,y,z)\,dx$$

5- a) (12P) $\displaystyle\iint_{x^2+y^2\le 1} \frac{1}{x^2+y^2+1}\,dA = ?$ $\displaystyle = \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^1 \frac{r}{r^2+1}\,dr$

Kutupsal koordinatlarda

$x = r\cos\theta$, $y = r\sin\theta$; $0 \le r \le 1$, $0 \le \theta \le 2\pi$

$dA = r\,dr\,d\theta$

$x^2+y^2 = r^2$

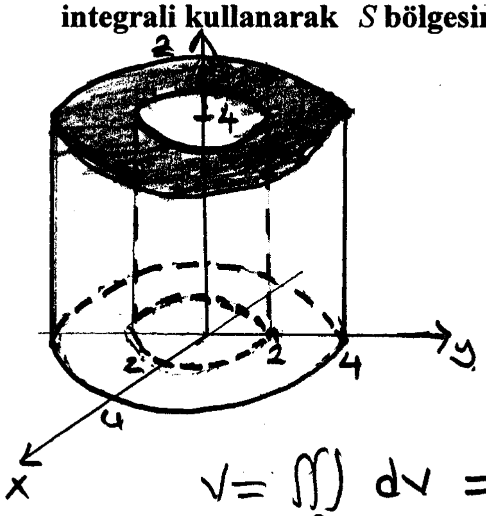
$$= \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} d\theta \int_0^1 \frac{2r}{r^2+1}\,dr$$

$$= \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} \left(\ln(r^2+1)\Big]_{r=0}^{1} \right) d\theta$$

$$= \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} (\ln 2 - \ln 1)\,d\theta = \frac{1}{2}\cdot \ln 2 \cdot \int_0^{2\pi} d\theta$$

$$= \frac{\ln 2}{\cancel{2}} \cdot \cancel{2}\pi = \boxed{\pi \cdot \ln 2}$$

b) (12P) (8P) S; $x^2+y^2=4$ **ve** $x^2+y^2=16$ **silindirlerinin arasındaki kısmın** $z=0$ **ve** $z=4$ **düzlemleri ile sınırlandırılması ile oluşturulan bölge olduğuna göre üç katlı integrali kullanarak** S **bölgesinin hacmini bulunuz.**



Silindirik koordinatlarda

$x = r\cos\theta$, $y = r\sin\theta$, $z = z$; $2 \le r \le 4$, $0 \le \theta \le 2\pi$, $0 \le z \le 4$.

$$V = \iiint_R dV = \int_0^4 dz \int_0^{2\pi} d\theta \int_2^4 r\,dr$$

$$= \int_0^4 dz \int_0^{2\pi} d\theta \left(\frac{r^2}{2}\Big]_2^4 \right) = 4 \times 2\pi \times \left(\frac{16}{2} - \frac{4}{2} \right)$$

$$= 4 \times 2\pi \times 6 = \boxed{48\pi \text{ br}^3}$$