MAT-102 MATEMATİK -II FİNAL SINAVI

Sınav Süresi : 90 dk. **BAŞARILAR**

1	2	3	4	5	Toplam	GİRMEDİ

1- a) (8P) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{\left(\sqrt{2}\,n-1\right)^2}{\sqrt{2}\,n^2-n+2} = ?$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{2n^2-2\sqrt{2}n+1}{\sqrt{2}n^2-n+2} = \lim_{n\to\infty} \frac{\cancel{n^2}\left(2-\frac{2\sqrt{2}}{n}+\frac{1}{n^2}\right)}{\cancel{n^2}\left(\sqrt{2}-\frac{1}{n}+\frac{2}{n^2}\right)}$$

$$= \frac{2-\cancel{\lim\limits_{n\to\infty}\frac{2\sqrt{2}}{n}}^{\,0}+\cancel{\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n^2}}^{\,0}}{\sqrt{2}-\cancel{\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n}}_{\,0}+\cancel{\lim\limits_{n\to\infty}\frac{2}{n^2}}_{\,0}} = \frac{2}{\sqrt{2}} = \boxed{\sqrt{2}}$$

b) (8P) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\sqrt{\dfrac{n+1}{n}}$ **serisinin yakınsak olup olmadığını belirleyiniz.**

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt{\frac{n+1}{n}} = \sqrt{\underbrace{\lim_{n\to\infty}\frac{n+1}{n}}_{1}} = 1 \quad \text{olup.} \quad \lim_{n\to\infty}\sqrt{\frac{n+1}{n}} = 1 \neq 0$$

olduğundan seri $\boxed{\text{Iraksaktır.}}$

(Not: $\sum a_n$ yak $\Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$, $\lim\limits_{n\to\infty} a_n \neq 0$ ise $\sum a_n$ Iraksak)

c) (8P) $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{5^n}{n!}$ **serisinin yakınsak olup olmadığını belirleyiniz.**

(oran testinden)

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{5^{n+1}}{(n+1)!}}{\frac{5^n}{n!}} = \lim_{n\to\infty}\frac{\cancel{5^n}.5}{(n+1).\cancel{n!}}\cdot\frac{\cancel{n!}}{\cancel{5^n}}$$

$$= \lim_{n\to\infty}\frac{5}{n+1} = 0 < 1$$

olduğundan oran testinden $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{5^n}{n!}$ serisi

$\boxed{\text{yakınsaktır.}}$

minimum değerlerini bulunuz.

2- a) (10P) $x=e^{rs}$, $y=\dfrac{s+r}{t}$ **ve** $z=rst$ **olmak üzere** $u=\ln(x+y^2+e^z)$ **için** $\dfrac{\partial u}{\partial s}$ **türevini bulunuz.**

$$\frac{\partial u}{\partial s}=\frac{\partial u}{\partial x}\cdot\frac{\partial x}{\partial s}+\frac{\partial u}{\partial y}\cdot\frac{\partial y}{\partial s}+\frac{\partial u}{\partial z}\cdot\frac{\partial z}{\partial s}.$$

$$=\frac{1}{x+y^2+e^z}\cdot r.e^{rs}+\frac{2y}{x+y^2+e^z}\cdot\frac{1}{t}+\frac{e^z}{x+y^2+e^z}\cdot r.t$$

$$=\frac{1}{x+y^2+e^z}\left(r.e^{rs}+\frac{2y}{t}+r.t\,e^z\right)$$

b) (14P) $f(x,y)=x^2+2y^2$ **fonksiyonunun** $x^2+y^2=1$ **koşuluna bağlı olarak maksimum ve minimum değerlerini bulunuz.**

$L(x,y,\lambda)=x^2+2y^2+\lambda(x^2+y^2-1)$

① $\dfrac{\partial L}{\partial x}=2x+2x\lambda=0$

② $\dfrac{\partial L}{\partial y}=4y+2y\lambda=0.$

③ $\dfrac{\partial L}{\partial \lambda}=x^2+y^2-1=0$

① den $2x(1+\lambda)=0 \Rightarrow x=0$ ~~veya~~ $\lambda=-1$ dr.

$x=0$ ise ③ den $y=\mp1$ olur.

$\lambda=-1$ ise ② den $2y=0 \Rightarrow y=0$ ve.

③ den $x=\mp1$ bulunur.

Bu durumda L inin kritik noktaları

$(0,1)$, $(0,-1)$, $(1,0)$, $(-1,0)$ bulunur.

$f(0,1)=2$, $f(0,-1)=2$, $f(1,0)=1$, $f(-1,0)=1$.

Böylece f inin $x^2+y^2=1$ koşulu altında

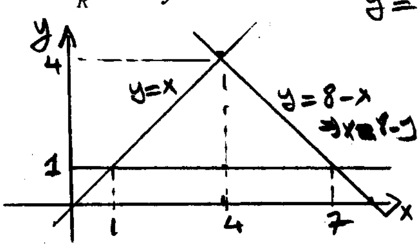
maksimum değeri $\boxed{f(0,\mp1)=2}$ ve

minimum değeri $\boxed{f(\mp1,0)=1}$ bulunur.

3- a) (12P) R; $y=x$, $y=8-x$ **ve** $y=1$ **doğrularının sınırladığı bölge olmak üzere** $\iint_R\left(2+\dfrac{1}{y}\right)dA=?$

$y=x$, $y=8-x \Rightarrow x=8-x \Rightarrow 2x=8 \Rightarrow x=4, y=4.$

$y=1$ için $x=1$ ve $1=8-x \Rightarrow x=7$ dir.



$$\iint_R\left(2+\tfrac{1}{y}\right)dA=\int_1^4 dy\int_y^{8-y}\left(2+\tfrac{1}{y}\right)dx=\int_1^4\left(\left(2+\tfrac{1}{y}\right)x\Big]_y^{8-y}\right)dy$$

$$=\int_1^4\left(2+\tfrac{1}{y}\right)(8-2y)\,dy=\int_1^4\left(16+\tfrac{8}{y}-4y-2\right)dy$$

$$=\int_1^4\left(14-4y+\tfrac{8}{y}\right)dy=\left(14y-2y^2+8\ln y\right)\Big|_1^4$$

$$=56-32+8\ln 4-14+2-0=\boxed{12+8\ln 4}$$

b) (12P) S; $0\le z\le 1/\pi$ olmak üzere $x^2+y^2\le a^2$ **ile belirli katı silindir olduğuna göre** $\iiint_S(x^4+2x^2y^2+y^4)\,dV=?$

$$=\iiint_S(x^2+y^2)^2dV=\int_0^{1/\pi}dt\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^a(r^2)^2\,r\,dr.$$

Silindirik koordinatlarda

$z=t$, $x=r\cos\theta$, $y=r\sin\theta$, $dV=r\,dr\,d\theta\,dt$ $\Rightarrow$ $0\le t\le\frac{1}{\pi}$, $0\le r\le a$, $0\le\theta\le 2\pi$

$$=\int_0^{1/\pi}dt\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^a r^5\,dr.$$

$$=\frac{1}{\pi}\times2\pi\times\left(\frac{r^6}{6}\Big|_0^a\right)=2\cdot\frac{a^6}{6}=\boxed{\frac{a^6}{3}}$$

4-(8P) **a)** $\mathbf{F}(x,y) = xy^2\mathbf{i} + x^2y\,\mathbf{j}$ **vektör alanı veriliyor.** F **korunumlu ise bir potansiyelini bulunuz.** $F_1(x,y) = xy^2$, $F_2(x,y) = x^2y$ olup.

$$\frac{\partial F_1}{\partial y} = 2xy = \frac{\partial F_2}{\partial x} \text{ dır.}$$

$F(x,y) = xy^2 i + x^2y j = \nabla \phi(x,y) = \frac{\partial}{\partial x}\phi(x,y) i + \frac{\partial}{\partial y}\phi(x,y)$ ol. biçimde ϕ var olsun.

$$\frac{\partial \phi}{\partial x} = xy^2 \Rightarrow \phi(x,y) = \int xy^2 dx = \frac{x^2y^2}{2} + c_1(y) \quad \ldots (1).$$

$$\cancel{x^2y} = \frac{\partial \phi}{\partial y} = \cancel{x^2y} + c_1'(y) \Rightarrow c_1'(y) = 0 \Rightarrow c_1(y) = c \text{ sabit olup}$$

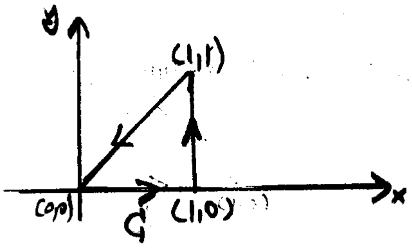
(1) de yerine yazarsak. $\phi(x,y) = \frac{x^2y^2}{2} + c$ dır.

Şu halde F korunumlu olup

$\phi(x,y) = \frac{x^2y^2}{2}$ F için bir potansiyeldir.

b) (8P) C; (0,0) **noktasını** (1,0) **noktasına,** (1,0) **noktasını** (1,1) **noktasına ve** (1,1) **noktasını** (0,0) **noktasına bağlayan kapalı yol olduğuna göre**

$$\int_C \left(xy^2 dx + x^2 y dy\right) = ?$$



F, C'nin sınırladığı bölgede korunumlu ve C basit kapalı olduğundan,

$$\int_C xy^2dx + x^2y\,dy = 0 \text{ dır.}$$

$$\left(\text{Green teor. } \int_C xy^2dx + x^2y\,dy = \iint_S \underbrace{\left(\frac{\partial F_2}{\partial x} - \frac{\partial F_1}{\partial y}\right)}_{0} dA\right)$$

c) (8P) C; (0,0) **noktasını** (1,1) **noktasına bağlayan** $y = \sqrt{x}$ **eğrisi ise**

$$\int_C \left(xy^2 dx + x^2 y dy\right) = ?$$

F korunumlu olduğundan integral yoldan bağımsızdır ve sadece uç noktalara bağlıdır.

$$\int_C xy^2dx + x^2y\,dy = \phi(x,y)\Big|_{(0,0)}^{(1,1)} = \frac{x^2y^2}{2}\Big|_{(0,0)}^{(1,1)} = \boxed{\frac{1}{2}} \text{ dır.}$$

<u>II. yol.</u> $y = \sqrt{x} \Rightarrow dy = \frac{1}{2\sqrt{x}}dx.$

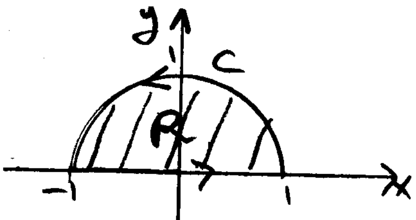
$$\int_C xy^2dx + x^2y\,dy = \int_0^1 \left(x^2dx + x^2\cancel{\sqrt{x}}\cdot\frac{1}{2\cancel{\sqrt{x}}}dx\right) = \int_0^1 \left(x^2 + \frac{x^2}{2}\right)dx$$

$$= \int_0^1 \frac{3x^2}{2}dx = \frac{x^3}{2}\Big|_0^1 = \boxed{\frac{1}{2}}$$

5- a) (12P) $C;\ 0 \le x^2 + y^2 \le 1,\ y \ge 0$ yarı diskinin pozitif yönlü sınırı olduğuna göre Green Teoremini kullanarak

$\oint_C (-ydx + xdy)$ integralini hesaplayınız.

$F_1(x,y) = -y$, $F_2(x,y) = x$ olup $\frac{\partial F_1}{\partial y} = -1$, $\frac{\partial F_2}{\partial x} = 1$ dır.



R basit kapalı C eğrisi ile sınırlı kapalı bölge olup Green teoreminden

$$\oint(-ydx+xdy) = \iint_R \left(\frac{\partial F_2}{\partial x} - \frac{\partial F_1}{\partial y}\right) dA = \iint_R (1+1)\, dA$$

$$= 2\iint_R dA = 2\int_0^{\pi} d\theta \int_0^1 r\,dr = 2\times\pi\times\left(\frac{r^2}{2}\Big|_0^1\right)$$

$\left(\begin{matrix} 0 \le r \le 1 \\ 0 \le \theta \le \pi \end{matrix}\right)$ (R'nin alanı) Kut. koor.

$$= \cancel{2}\cdot\pi \times \frac{1}{\cancel{2}} = \boxed{\pi} \text{ bulunur.}$$

(yada $2\iint_R dA = 2\left(\frac{\pi}{2}\right) = \pi$)

b) (12P) $\mathbf{F}(x,y,z) = x\sqrt{y}\,\mathbf{i} + (y+\sin z)\mathbf{j} + xz\mathbf{k}$ vektör alanı için

div F =? $= \frac{\partial}{\partial x}(x\sqrt{y}) + \frac{\partial}{\partial y}(y+\sin z) + \frac{\partial}{\partial z}(xz)$

$= \boxed{\sqrt{y} + 1 + x}$

curl F=? $= \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & k \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ x\sqrt{y} & y+\sin z & xz \end{vmatrix}$

$$= \left(\frac{\partial}{\partial y}(xz) - \frac{\partial}{\partial z}(y+\sin z)\right)\hat{i} - \left(\frac{\partial}{\partial x}(xz) - \frac{\partial}{\partial z}(x\sqrt{y})\right)\hat{j}$$
$$+ \left(\frac{\partial}{\partial x}(y+\sin z) - \frac{\partial}{\partial y}(x\sqrt{y})\right)k.$$

$$= \boxed{-\cos z\,\hat{i} - z\hat{j} - \frac{x}{2\sqrt{y}}\,k}$$