

Öğrenci Bilgileri

Numarası

Adı Soyadı

Fakülte

Bölüm



Oturum Bilgileri

Yerleşke

Salon

Bina

Sıra No

Sorular

SINAV SÜRESİ 90 DAKİKADIR, BAŞARILAR

1	2	3	4	5	TOPLAM	GİRMEDİ

1-a) (8P) $\int_0^1 2^x 3^{x+1} dx = ?$

$$= \int_0^1 2^x \cdot 3^x \cdot 3 dx = 3 \int_0^1 (2 \cdot 3)^x dx = 3 \int_0^1 6^x dx.$$

$$= 3 \cdot \left(\frac{6^x}{\ln 6} \right) \Big|_0^1 = 3 \cdot \left(\frac{6}{\ln 6} - \frac{6^0}{\ln 6} \right) = 3 \left(\frac{6-1}{\ln 6} \right) = \boxed{\frac{15}{\ln 6}}$$

b) (8P) $\int x^3 \sin(x^2) dx = ?$

$$x^2 = t \text{ diyalim} \Rightarrow 2x dx = dt$$

$$\Rightarrow x dx = \frac{dt}{2}$$

$$\int x^3 \sin(x^2) dx = \int x^2 \sin(x^2) \cdot x dx = \frac{1}{2} \int t \sin t dt.$$

$\left(\begin{array}{l} \text{Kümü int.} \\ u = t \Rightarrow du = dt \\ dv = \sin t dt \Rightarrow v = -\cos t \end{array} \right)$

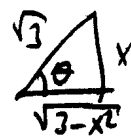
$$= \frac{1}{2} [-t \cos t + \int \cos t dt]$$

$$= \frac{1}{2} [-t \cos t + \sin t] + C.$$

$$= \boxed{\frac{1}{2} [-x^2 \cos x^2 + \sin x^2] + C.}$$

c) (8P) $\int (3-x^2)^{3/2} dx = ?$

$$x = \sqrt{3} \sin \theta \Rightarrow dx = \sqrt{3} \cos \theta d\theta.$$



$$\int (3-x^2)^{3/2} dx = \int (3-3\sin^2 \theta)^{3/2} \sqrt{3} \cos \theta d\theta.$$

$$= 3^{3/2} \cdot 3^{1/2} \int (1-\sin^2 \theta)^{3/2} \cos \theta d\theta = 9 \int (\cos^2 \theta)^{3/2} \cos \theta d\theta.$$

$$= 9 \int \cos^4 \theta d\theta = 9 \int (\cos^2 \theta)^2 d\theta = 9 \int \left(\frac{1+\cos 2\theta}{2} \right)^2 d\theta$$

$$= \frac{9}{4} \int (1 + 2\cos 2\theta + \cos^2 2\theta) d\theta = \frac{9}{4} \left[\theta + 2 \cdot \frac{\sin 2\theta}{2} + \int \frac{1+\cos 4\theta}{2} d\theta \right]$$

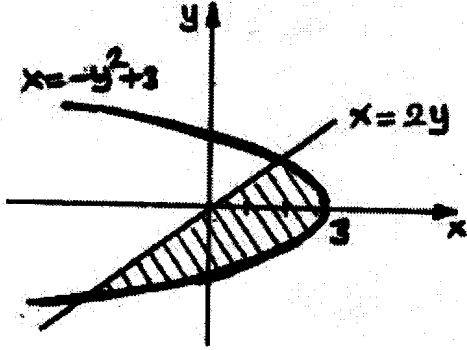
$$= \frac{9}{4} \left[\theta + \sin 2\theta + \frac{1}{2} \theta + \frac{\sin 4\theta}{8} \right] + C.$$

$$= \frac{9}{4} \left[\frac{3}{2} \theta + 2 \sin \theta \cdot \cos \theta + \frac{1}{8} \sin 4\theta \cdot \cos \theta (1-\sin^2 \theta) \right]$$

$$= \frac{9}{4} \left[\frac{3}{2} \sin^{-1} \frac{x}{\sqrt{3}} + 2 \frac{x}{\sqrt{3}} \cdot \frac{\sqrt{3-x^2}}{\sqrt{3}} + \frac{1}{2} \frac{x}{\sqrt{3}} \cdot \frac{\sqrt{3-x^2}}{\sqrt{3}} \cdot (1-\frac{x^2}{3}) \right] + C.$$

$$= \frac{9}{4} \left[\frac{3}{2} \sin^{-1} \frac{x}{\sqrt{3}} + \frac{5}{6} x \cdot \sqrt{3-x^2} - \frac{1}{6} x^3 \sqrt{3-x^2} \right] + C$$

2- a) (14P) Şekilde gösterildiği gibi $x = -y^2 + 3$ eğrisi ve $x = 2y$ doğrusu tarafından sınırlanan tarah düzlemsel bölgenin alanını bulunuz.



Eğrilerin kesişim noktaları;

$$\begin{aligned} -y^2 + 3 &= 2y \Leftrightarrow y^2 - 3 + 2y = 0 \\ &\Leftrightarrow y = 1, y = -3. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} A &= \int_{-3}^1 (-y^2 + 3 - 2y) dy = \left(-\frac{y^3}{3} + 3y - \frac{2y^2}{2} \right) \Big|_{-3}^1 = -\frac{1}{3} + 3 - 1 - \left(-\frac{(-3)^3}{3} - 9 - (-9) \right) \\ &= \frac{5}{3} - (\cancel{9} - \cancel{9} - 9) = \frac{5}{3} + 9 = \frac{5 + 27}{3} = \boxed{\frac{32}{3}} \text{ br}^2. \end{aligned}$$

II. Çözümler:

$$\begin{aligned} A &= \int_{-6}^2 \left[\frac{x}{2} - (-\sqrt{3-x}) \right] dx + \int_2^3 \left[\sqrt{3-x} - (-\sqrt{3-x}) \right] dx \\ &= \int_{-6}^2 \left(\frac{x}{2} + \sqrt{3-x} \right) dx + 2 \int_2^3 \sqrt{3-x} dx \\ &= \left(\frac{x^2}{4} - \frac{2}{3} (3-x)^{3/2} \right) \Big|_{-6}^2 - \frac{4}{3} (3-x)^{3/2} \Big|_2^3 = \frac{31}{3} \text{ br}^2 \end{aligned}$$

b) (10P)

$$\int_0^1 \frac{x^2}{x^2+3} dx = ?$$

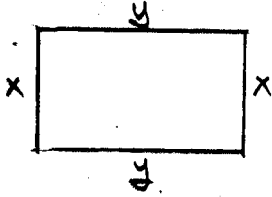
$$= \int_0^1 \frac{x^2+3-3}{x^2+3} dx = \int_0^1 \frac{x^2+3}{x^2+3} dx - 3 \int_0^1 \frac{dx}{x^2+3}$$

$$= \int_0^1 dx - 3 \int_0^1 \frac{dx}{x^2+3} = \left(x - \frac{2}{\sqrt{3}} \tan^{-1} \frac{x}{\sqrt{3}} \right) \Big|_0^1$$

$$= \left(1 - \frac{3}{\sqrt{3}} \tan^{-1} \frac{1}{\sqrt{3}} - 0 + \frac{3}{\sqrt{3}} \tan^{-1} 0 \right)$$

$$= 1 - \frac{3}{\sqrt{3}} \cdot \frac{\pi}{6} = \boxed{1 - \frac{\pi}{2\sqrt{3}}}$$

3- (a) (14P) Boş bir arazinin $3000m^2$ lik kısmı dikdörtgen biçiminde ayrılp kenarları telle çevrilerek bahçe yapılmak isteniyor. Bu bahçenin üç kenarında metresi 3 lira, bir kenarında metresi 1 lira olan tel kullanılacaktır. Maliyetin en ucuza gelmesi için bahçenin kenar uzunlukları ne olmalıdır? Bulunuz.



$$xy = 3000 \Rightarrow y = \frac{3000}{x}$$

$$\text{Maliyet } M = 3x + 3x + 3y + y = 6x + 4y$$

$$\Rightarrow M(x) = 6x + \frac{12000}{x}$$

$$\frac{dM(x)}{dx} = 6 - \frac{12000}{x^2}$$

$$M'(x) = 0 \Leftrightarrow 6 = \frac{12000}{x^2} \Leftrightarrow x^2 = 2000$$

$0 < x$ olduğundan $x = 20\sqrt{5} \Rightarrow y = 30\sqrt{5}$ bulunur.

$M(x)$ fonksiyonu $0 < x < 20\sqrt{5}$ için azalan, $20\sqrt{5} < x$ için artan olduğundan en küçük değeri $x = 20\sqrt{5}$ 'de dir.
Dura ~~par~~ bahçenin kenar uzunlukları $x = 20\sqrt{5}$ $y = 30\sqrt{5}$ olur.

b) (10P) $f(x) = \int_{\sqrt{x}}^x \cos t^2 e^{t^2} dt$ olduğuna göre $f'(1) = ?$

$$f'(x) = \cos x^2 \cdot e^{x^2} - \cos (\sqrt{x})^2 e^{(\sqrt{x})^2} \cdot \frac{1}{2\sqrt{x}}$$

$$= \cos x^2 e^{x^2} - \frac{\cos x e^x}{2\sqrt{x}}$$

$$\Rightarrow f'(1) = \cos 1 \cdot e - \frac{\cos 1 \cdot e}{2}$$

$$= \boxed{\frac{1}{2} \cos 1 \cdot e} \text{ bulunur.}$$

4- $f(x) = \frac{4}{x^2 - 4}$ fonksiyonu veriliyor.

a) (SP) f nin artan azalan olduğu aralıkları belirleyiniz. Varsa tüm asimptotlarını bulunuz.

$$f'(x) = \frac{-8x}{(x^2-4)^2} \text{ olup. } (x \neq \pm 2)$$

her $x < 0$ için $f'(x) > 0$ olup artan.

Artan olduğu aralık $(-\infty, -2) \cup (2, 0)$.

her $x > 0$ için $f'(x) < 0$ olup azalan.

Azalan olduğu aralık $(0, 2) \cup (2, \infty)$ dir.

$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{4}{x^2-4} = 0 = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{4}{x^2-4}$ olduğundan $y=0$ doğrusu f 'nin yatay asimptotudur.

$\lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{4}{x^2-4} = -\infty$, $\lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{4}{x^2-4} = \infty$, $\lim_{x \rightarrow -2^-} \frac{4}{x^2-4} = \infty$, $\lim_{x \rightarrow -2^+} \frac{4}{x^2-4} = -\infty$ olduğundan $x=2$ ve $x=-2$ dikey asimptotlar dir.

b) (SP) f nin varsa büküm noktalarını bulunuz ve iç bükümlüğünü inceleyiniz.

$$f''(x) = \frac{-8(x^2-4)^2 + 16x(x^2-4) \cdot 2x}{(x^2-4)^4} = \frac{-8(x^2-4)^2 + 32x^2(x^2-4)}{(x^2-4)^4}$$

$$= \frac{-8x^2 + 32 + 32x^2}{(x^2-4)^3} = \frac{24x^2 + 32}{(x^2-4)^3} \text{ olup.}$$

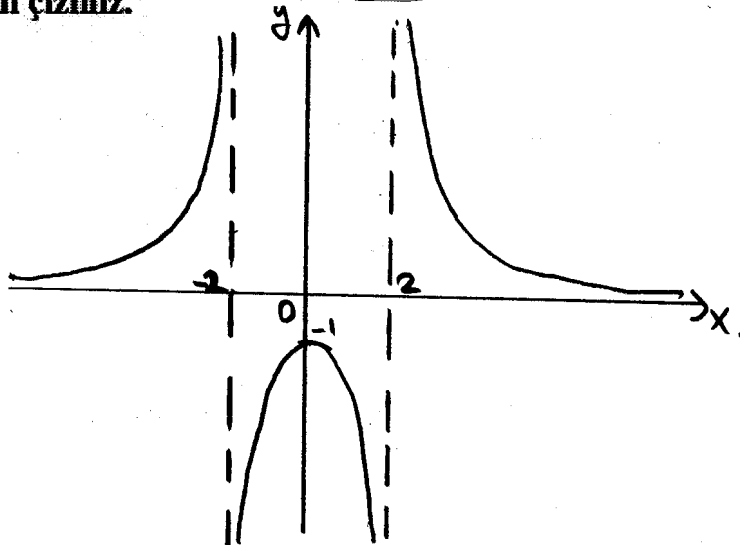
$\forall x \in \mathbb{R}$. $(x \neq \pm 2)$ için $f''(x) \neq 0$ olduğundan büküm noktası yok. $(x = \pm 2)$ asimptotlar old. bu noktalarda büküm noktası olamaz.

$(-2, 2)$ aralığında $f'' < 0$ olduğundan bu bükümlük aşağı
 $(-\infty, -2) \cup (2, \infty)$ aralığında $f'' > 0$ olduğundan bu bükümlük yukarı doğrudur.

c) (SP) f nin grafiğini çiziniz.

$$D_f = \mathbb{R} \setminus \{-2, 2\}$$

$x=0$ için $y=-1$ dir.



5- a) (12P) Aşağıda verilen ifadelerin doğru yada yanlış olup olmadığını belirleyiniz.

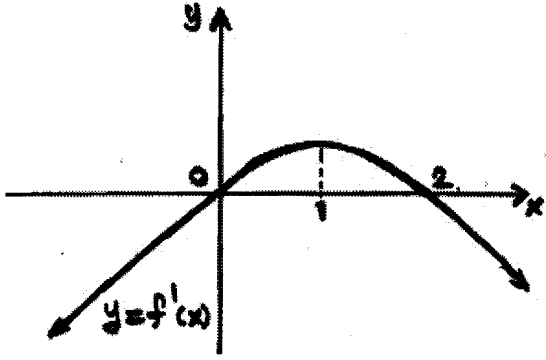
(i) $f''(a) = 0$ ise a f nin bükülme noktasıdır. (YANLIŞ)

(ii) $\int \sin 2x dx$ integrali hem $-\frac{\cos 2x}{2} + C_1$ hem de $\sin^2 x + C_2$ ye eşittir. (DOĞRU)

(iii) $\int f(x).g(x)dx = \int f(x)dx . \int g(x)dx$ (YANLIŞ)

(iv) $f'(x) = 0$ ise $x = 0$, f nin yerel ekstremum noktasıdır. (YANLIŞ)

b) (12P) Şekilde bir f fonksiyonunun $y = f'(x)$ türev fonksiyonunun grafiği verilmektedir. Grafiğe göre aşağıdaki boşlukları doldurunuz.



(i) f fonksiyonu $\dots(0,2)$ aralığında artandır.

(ii) f nin kritik noktaları $x=0, x=2$ dir.

(iii) f nin yerel maksimum noktası $\dots x=2$ dir.

(iv) $\int_0^2 f'(x) dx = \dots f(2) - f(0)$