Öğrenci Bilgileri

Numarası

Adı Soyadı

Fakülte

Bölüm

Oturum Bilgileri

Yerleşke **Salon**

Bina **Sıra No**

Sorular

ZORUNLU ORTAK SERVİS DERSLERİ
MATEMATİK-I / MAT101 DERSİ 2. ARA SINAVI
28 KASIM 2015 – 10:30

1	2	3	4	5	Toplam	GİRMEDİ

İmza :

SINAV SÜRESİ 90 DAKİKADIR.
İLK 30 DAKİKA SINAVDAN ÇIKMAK YASAKTIR.

BAŞARILAR...

1- a) (10P) $x\sin y = y\cos x$ kapalı tanımlı fonksiyonu için $\left(\dfrac{\pi}{2}, \pi\right)$ noktasında $\dfrac{dy}{dx}$ türevinin değerini bulunuz.

(her iki taraftan x'e göre türev alınırsa)

$x\sin y = y\cos x \Rightarrow \sin y + x\cos y \cdot y' = y'\cos x - y\sin x.$

$x = \frac{\pi}{2}$, $y = \pi$ alırsak.

$\sin\pi + \frac{\pi}{2}\cos\pi \left(y'\big|_{(\pi,\frac{\pi}{2})}\right) = \left(y'\big|_{(\pi,\frac{\pi}{2})}\right)\cdot\cos\frac{\pi}{2} - \pi\sin\frac{\pi}{2}.$

$\Rightarrow 0 + \frac{\pi}{2}(-1)\left(y'\big|_{(\pi,\frac{\pi}{2})}\right) = \left(y'\big|_{(\pi,\frac{\pi}{2})}\right)\cdot 0 - \pi\cdot 1.$

$= -\frac{\pi}{2}\left(y'\big|_{(\pi,\frac{\pi}{2})}\right) = 0$

$\Rightarrow \dfrac{dy}{dx}\Big|_{(\pi,\frac{\pi}{2})} = \dfrac{-\pi}{-\frac{\pi}{2}} = \boxed{2}$

b) (10P) $y = \sqrt{x^3 + 3x + 4}$ fonksiyonunun grafiğine $x = 0$ noktasında teğet olan doğrunun denklemini bulunuz.

$f(0) = \sqrt{4} = 2$

$y' = \dfrac{1}{2\sqrt{x^3+3x+4}}\cdot(3x^2+3) \Rightarrow f'(0) = \dfrac{3}{2\sqrt{4}} = \dfrac{3}{4}$

Buna göre $x=0$ noktasında teğet olan doğrunun denklemi;

$y = f'(0)(x-0) + f(0)$

$\Rightarrow \boxed{y = \frac{3}{4}x + 2}$ olur.

2- a) (10P) $y=\sqrt{\tan(4x+5)}$ ise $\dfrac{dy}{dx}=?$

$$\frac{dy}{dx}=\frac{1}{2\sqrt{\tan(4x+5)}}\cdot 4\cdot\sec^2(4x+5)$$

$$=\boxed{\frac{2\sec^2(4x+5)}{\sqrt{\tan(4x+5)}}}$$

b) (10P) $\displaystyle\int\left(\frac{2\sec^2(4x+5)}{\sqrt{\tan(4x+5)}}+2x^3\right)dx=?$

(a) şıkkından $\dfrac{d}{dx}\left(\sqrt{\tan 4x+5}\right)=\dfrac{2\sec^2(4x+5)}{\sqrt{\tan(4x+5)}}$ olduğunu biliyoruz. Buna göre

$$\int\left(\frac{2\sec^2(4x+5)}{\sqrt{\tan(4x+5)}}+2x^3\right)dx=\int\frac{2\sec^2(4x+5)}{\sqrt{\tan(4x+5)}}dx+\underbrace{\int 2x^3dx}_{=\frac{2.x^4}{4}}$$

$$=\boxed{\sqrt{\tan 4x+5}+\frac{x^4}{2}+C}$$ bulunur.

<u>II. Yol:</u> $u=\sqrt{\tan(4x+5)}\Rightarrow du=\dfrac{2\sec^2(4x+5)}{\sqrt{\tan(4x+5)}}dx$ olduğundan

$$\int\frac{2\sec^2(4x+5)}{\sqrt{\tan(4x+5)}}dx+\int 2x^3dx=\int du+\frac{2x^4}{4}$$

$$=u+\frac{2x^4}{4}+C=\boxed{\sqrt{\tan 4x+5}+\frac{x^4}{2}+C.}$$

3- (a) (10P) $f(x) = \begin{cases} -2x + a & : 0 \le x \le 1 \\ b\sqrt{x} & : 1 < x \le 2 \end{cases}$ fonksiyonunun $[0,2]$ aralığında Türevler için "Ortalama Değer Teoreminin" koşullarını sağlaması için a ve b ne olmalıdır?

f, O.D. Teoreminin koşullarını sağlaması için [0,2] aralığında sürekli ve (0,2) aralığında türevlenebilir olması gerekir.

O zaman $f(c) = \frac{1}{2-0} \int_0^2 f(x)\,dx$ olı biçimde $c \in [0,2]$ vardır.

$x=1$ de sürekli olması gerektiğinden

$\lim_{x\to 1^-} f(x) = \lim_{x\to 1^-} (-2x+a) = -2+a = \lim_{x\to 1^+} f(x) = \lim_{x\to 1^+} b\sqrt{x} = b.$

$\Rightarrow -2+a=b$

$x=1$ de türevlenebilir olmalı; $\Rightarrow f_+'(1) = f_-'(1)$ olmalı.

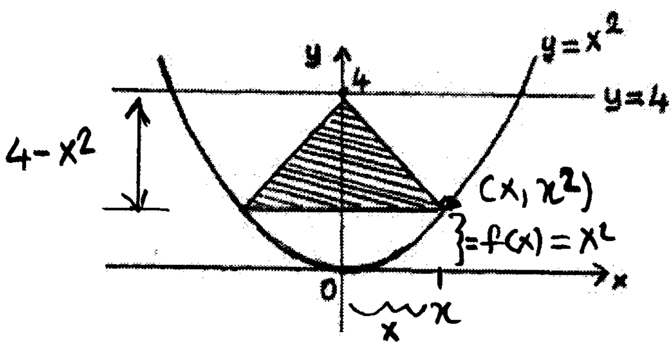
$f_+'(1) = \lim_{x\to 1^+} \frac{b}{2\sqrt{x}} = \frac{b}{2} = f_-'(1) = \lim_{x\to 1^-} -2x = -2 \Rightarrow \frac{b}{2} = -2$

$\boxed{b=-4}$

$-2+a = -4$

$\boxed{a=-2}$

b) (10P) Şekildeki gibi $y = x^2$ eğrisi ile $y = 4$ doğrusu arasına tabanı x - eksenine paralel olacak şekilde bir üçgen yerleştiriliyor. Çizilen bu üçgenin alanı en fazla ne olabilir? Bu üçgenin taban uzunluğu ile yüksekliği ne olur?



Üçgenin köşesinin $y=x^2$ üzerindeki noktasını x-ekseni üzerindeki orijine olan uzaklığını x ile gösterelim. O zaman üçgenin yüksekliği $h = 4-x^2$ ve taban uzunluğu $=2x$ olur.

$A(x) = \frac{2x\,(4-x^2)}{2}$ olup tanım kümesi $[0,2]$ dir.

$= 4x - x^3$

A, [0,2] üzerinde sürekli olduğundan, [0,2] üzerinde mutlak maksimum değeri alır.

$A'(x) = 4-3x^2 = 0. \Rightarrow x^2 = \frac{4}{3} \Rightarrow x = \mp\frac{2}{\sqrt{3}}$ $x \notin \frac{-2}{\sqrt{3}}$

$A\left(\frac{2}{\sqrt{3}}\right) = \frac{16}{3\sqrt{3}}$ $A(0) = A(2) = 0$ old.

$\boxed{\frac{16}{3\sqrt{3}}}$ üçgenin en büyük alanı olup üçgenin tabanı: $2\cdot\frac{2}{\sqrt{3}} = \boxed{\frac{4}{\sqrt{3}}}$

yüksekliği $= 4 - \left(\frac{2}{\sqrt{3}}\right)^2 = 4 - \frac{4}{3} = \boxed{\frac{8}{3}}$ olur.

4- $f(x)=\dfrac{x^2}{x^2-1}$ fonksiyonu veriliyor.

Tanım kümesi

$D(f)=(-\infty,-1)\cup(-1,1)\cup(1,\infty)$ dır.

a) (5P) f nin kritik noktalarını bulunuz. Artan ya da azalan olduğu aralıkları belirleyiniz. "***Varsa yerel maksimum ve yerel minimum noktalarını belirleyiniz.***"

$f'(x)=\dfrac{-2x}{(x^2-1)^2}=0 \Leftrightarrow x=0$ olur.

x	$-\infty$	-1	0	1	$+\infty$
$f'(x)$	$+$	$+$	$\bullet$	$-$	$-$
$f(x)$	$\nearrow$		y. mak. nok	$\searrow$	1

$(-\infty,-1)$, $(-1,0)$ aralığında artan

$(0,1)$, $(1,\infty)$ aralığında azalan.

$x=0$ f inin yerel mak. noktası olup değeri $f(0)=0$ dır.

b) (5P) f nin varsa büküm noktalarını bulunuz. Yukarı ya da aşağı konkav olduğu aralıkları belirleyiniz.

$f''(x)=\dfrac{2}{(x^2-1)^3}\neq 0$ (büküm noktası yoktur)

$(-\infty,-1)$, $(1,\infty)$ da yukarı konkav.

$(-1,1)$ de aşağı konkav.

x		-1		1	
$f''(x)$	$(+)$	$\bullet$	$(-)$	$\bullet$	$(+)$
$f(x)$	yukarı konkav	ϕ	aşağı konkav.	ϕ	yukarı konkav

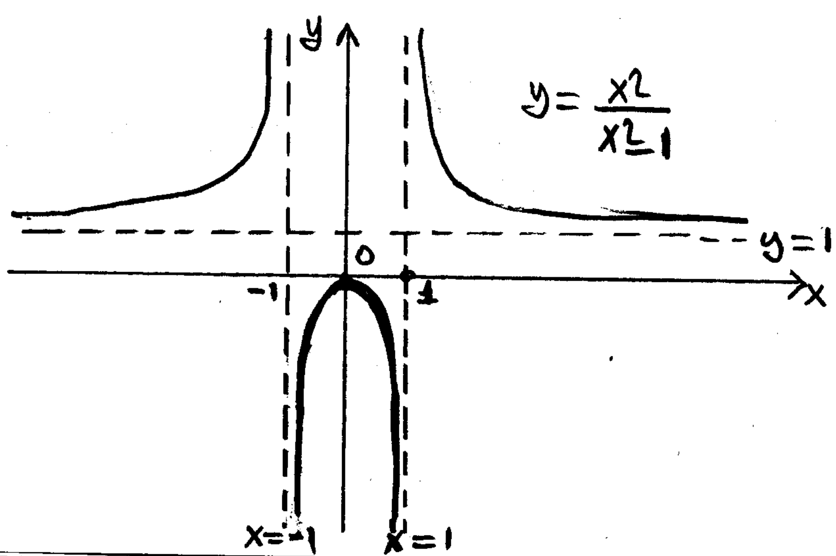
c) (5P) Varsa f nin tüm asimptotlarını bulunuz.

$\lim\limits_{x\to 1^+}\dfrac{x^2}{x^2-1}=+\infty$ $\lim\limits_{x\to 1^-}\dfrac{x^2}{x^2-1}=-\infty$, $\lim\limits_{x\to -1^+}\dfrac{x^2}{x^2-1}=-\infty$, $\lim\limits_{x\to -1^-}\dfrac{x^2}{x^2-1}=+\infty$.

olduğundan $x=-1$ ve $x=1$ düşey asimptottur.

$\lim\limits_{x\to \mp\infty}\dfrac{x^2}{x^2-1}=1$ olduğundan $y=1$ yatay asimptottur.

d) (5P) f nin grafiğini çiziniz.



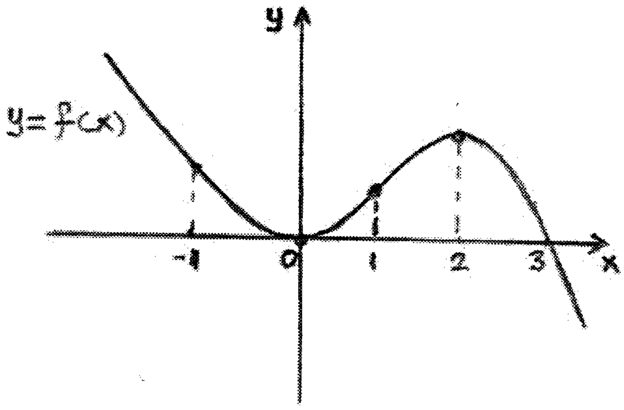
5- Aşağıdaki **boşlukları** doldurunuz.

(a) (4P) $y = \sec\sqrt{x}$ olduğuna göre $dy = \dfrac{\sec\sqrt{x}.\tan\sqrt{x}.dx}{2\sqrt{x}}$ dir.

(b) (4P) Grafiği $(0,1)$ noktasından geçen ve türevi $f'(x) = 2x$ olan fonksiyon

$f(x) =$ x^2+1 dir.

c, d, e şıklarındaki boşlukları aşağıda verilen $y = f(x)$ fonksiyonunun grafiğine göre doldurunuz.



(c) (4P) $(0,2)$ aralığındaki her x için $f'(x) > 0$ dır.

(d) (4P) $(-\infty,1)$ aralığındaki her x için $f''(x) > 0$ dır.

(e) (4P) $f'(x) = 0$ olduğu noktalar $x=0, x=2$ dir.