Öğrenci Bilgileri

Numarası

Adı Soyadı

Fakülte

Bölüm

Oturum Bilgileri

Yerleşke

Salon

Bina

Sıra No

Sorular

ZORUNLU ORTAK SERVİS DERSLERİ
MAT102-MATEMATİK-II DERSİ 2. ARA SINAVI

1	2	3	4	5	Toplam	GİRMEDİ

AD-SOYAD :

NUMARA :

İMZA :

SINAV SÜRESİ 90 DAKİKADIR.
BAŞARILAR...

1- a) (10P) $f(x,y)=\begin{cases} \dfrac{x^3+y^3}{x+y} & :(x,y)\neq(1,-1) \\ a & :(x,y)=(1,-1) \end{cases}$ **fonksiyonunun *sürekli* olması için** a **sayısı ne olmalıdır? Cevabınızı açıklayınız.**

$$\lim_{(x,y)\to(1,-1)} \frac{x^3+y^3}{x+y} = \lim_{(x,y)\to(1,-1)} \frac{\cancel{(x+y)}(x^2-xy+y^2)}{\cancel{x+y}} = \lim$$

$$= \lim_{(x,y)\to(1,-1)} (x^2-xy+y^2) = 1^2-(1)(-1)+(-1)^2$$

$$=3 = f(-1,1) = a \text{ olmalı.}$$

Yani $\boxed{a=3}$ dür.

b) (10P) $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{(x+y)^2}{x^2+y^2}$ **limiti var mıdır? Neden? Varsa değerini bulunuz.**

Eğer (0,0) da limit varsa hangi eğri (yada doğru) boyunca (0,0)'a yaklaşarak limitin aynı olması gerekir.
$y=mx$ doğrusu boyunca (0,0)'a yaklaşalım.

$y=mx$ için $\dfrac{(x+y)^2}{x^2+y^2} = \dfrac{(x+mx)^2}{x^2+(mx)^2} = \dfrac{x^2+2mx^2+m^2x^2}{x^2+m^2x^2}$

$$= \frac{\cancel{x^2}(1+2m+m^2)}{\cancel{x^2}(1+m^2)} = \frac{1+2m+m^2}{1+m^2} \text{ olup}$$

$y=mx$ boyunca limit

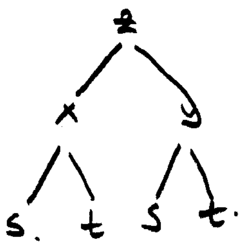
$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{(x+y)^2}{x^2+y^2} = \frac{1+2m+m^2}{1+m^2} \text{ olup}$$

m'nin her değişiminde limitte farklı olacağından (0,0)'da <u>limit yoktur</u>

2- a) (10P) $x = s + t$, $y = s - t$ **olmak üzere** $z = \sin 2x \cos 3y$ **olduğuna göre**

$\dfrac{\partial z}{\partial s} = ?$

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{\partial z}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial s} + \frac{\partial z}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial s}$$



$$= \underbrace{2\cos 2x \cos 3y}_{\frac{\partial z}{\partial x}} \cdot \underbrace{(1)}_{\frac{\partial x}{\partial s}} + \underbrace{(-3\sin 2x \sin 3y)}_{\frac{\partial z}{\partial y}} \cdot \underbrace{(1)}_{\frac{\partial y}{\partial s}}$$

$$= 2\cos(2\overbrace{(s+t)}^{x}) \cdot \cos(3\overbrace{(s-t)}^{y}) - 3\sin(2\overbrace{(s+t)}^{x}) \sin(3\overbrace{(s-t)}^{y})$$

$\dfrac{\partial z}{\partial t} = ?$

$$\frac{\partial z}{\partial t} = \frac{\partial z}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial t} + \frac{\partial z}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial t}$$

$$= \underbrace{2\cos 2x \cos 3y}_{\frac{\partial z}{\partial x}} \cdot \underbrace{(1)}_{\frac{\partial x}{\partial t}} + \underbrace{(-3\sin 2x \sin 3y)}_{\frac{\partial z}{\partial y}} \cdot \underbrace{(-1)}_{\frac{\partial y}{\partial t}}$$

$$= 2\cos(2\underbrace{(s+t)}_{x}) \cos(3\underbrace{(s-t)}_{y}) + 3\sin(2\underbrace{(s+t)}_{x}) \sin(3\underbrace{(s-t)}_{y})$$

b) (10P) $f(x,y) = 6x^2 - 2x^3 + 3y^2 + 6xy$ **fonksiyonunun kritik noktalarını bulunuz. Bu noktaların yerel maksimum ya da yerel minimum ya da eyer noktası olup olmadığını belirleyiniz.**

① $f_x(x,y) = 12x - 6x^2 + 6y = 0$
② $f_y(x,y) = 6y + 6x = 0$ $\Rightarrow$

② den $x + y = 0 \Rightarrow y = -x$.
① den $12x - 6x^2 - 6x = 0$
$\Rightarrow -6x^2 + 6x = 0 \Rightarrow 6x(-x+1) = 0$

$\Rightarrow x = 0$ veya $x = 1$ olur.
$x = 0$ ile ② den $y = 0$; $x = 1$ ile ② den $y = -1$.

$\boxed{(0,0) \text{ ve } (1,-1)}$ f'nin kritik noktalarıdır.

$f_{xx} = 12 - 12x$, $f_{yy} = 6$, $f_{xy} = 6$.

$(0,0)$ için: $f_{xx}(0,0) = 12$, $f_{yy}(0,0) = 6$, $f_{xy}(0,0) = 6$

$\Rightarrow f_{xx}(0,0) \cdot f_{yy}(0,0) - [f_{xy}(0,0)]^2 = 72 - 36 = 36 > 0$ ve $f_{xx}(0,0) = 12 > 0$ olduğundan

$\boxed{(0,0) \text{ f'nin yerel minimum noktasıdır}}$.

$(1,-1)$ için; $f_{xx}(1,-1) = 0$, $f_{yy}(1,-1) = 6$, $f_{xy}(1,-1) = 6$ olup.

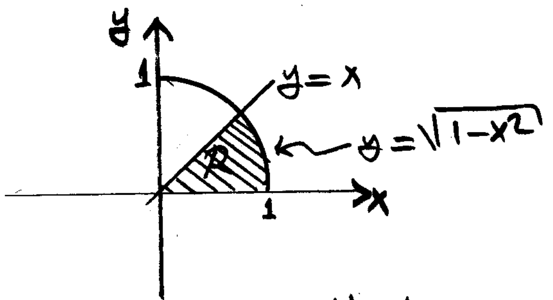
$\Rightarrow f_{xx}(1,-1) \cdot f_{yy}(1,-1) - [f_{xy}(1,-1)]^2 = 0 - 36 = -36 < 0$ olduğundan

$\boxed{(1,-1) \text{, f'nin eyer noktası}}$ olur.

3- a) (10P) R **: Birinci bölgede** $y = x$ **doğrusu** x **- ekseni ve** $y = \sqrt{1-x^2}$ **eğrisi ile sınırlı bölge olduğuna göre**

$$\iint_R \cos(x^2+y^2)\,dA = ?$$

$$= \int_{\theta=0}^{\pi/4}\int_{r=0}^{1} \cos(\underbrace{r^2\cos^2\theta + r^2\sin^2\theta}_{r^2(\underbrace{\cos^2\theta+\sin^2\theta}_{1})})\, r\,dr\,d\theta$$



$$= \int_0^{\pi/4}\int_0^1 r\cos(r^2)\,dr\,d\theta$$

$$\left(\begin{array}{l} u = r^2 \Rightarrow \frac{du}{2} = r\,dr \\ r=0 \Rightarrow u=0 \\ r=1 \Rightarrow u=1 \end{array} \right)$$

Kutupsal koordinatlarda;

$x = r\cos\theta$, $y = r\sin\theta$

$dA = r\,dr\,d\theta$

$0 \le r \le 1$

$0 \le \theta \le \frac{\pi}{4}$

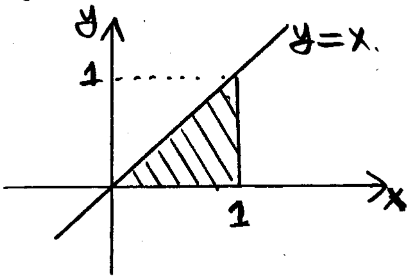
$$= \frac{1}{2}\int_0^{\pi/4}\int_0^1 \cos u\,du\,d\theta$$

$$= \frac{1}{2}\int_0^{\pi/4}\left(\sin u\right]_0^1 d\theta = \frac{1}{2}\int_0^{\pi/4}(\sin 1 - \cancel{\sin 0})\,d\theta$$

$$= \frac{1}{2}\sin 1 \int_0^{\pi/4} d\theta = \boxed{\frac{\pi}{8}\sin 1}$$

b) (10P) $\int_0^1\int_y^1 x^2 e^{xy}\,dx\,dy$ **integralinin integrasyon bölgesini çiziniz, integral sırasını değiştirerek integrali hesaplayınız.**

$y \le x \le 1$ ve $0 \le y \le 1$



$$\int_0^1\int_y^1 x^2 e^{xy}\,dx\,dy = \int_0^1\int_0^x x^2 e^{xy}\,dy\,dx.$$

$$= \int_0^1\left(\frac{x^2 e^{xy}}{x}\right]_0^x dx = \int_0^1\left(x\,e^{xy}\right]_0^x dx$$

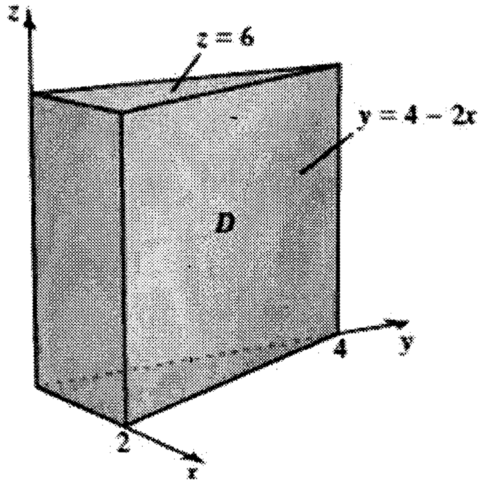
$$= \int_0^1 x e^{x^2}\,dx = \frac{1}{2}\int_0^1 e^u\,du = \frac{1}{2}\left(e^u\right]_0^1$$

$$\left(\begin{array}{l} u = x^2 \Rightarrow \frac{du}{2} = x\,dx. \\ x=0 \Rightarrow u=0 \\ x=1 \Rightarrow u=1 \end{array} \right)$$

$$= \frac{1}{2}(e - e^0)$$

$$= \boxed{\frac{1}{2}(e-1)}$$

4- a) (10P) Şekildeki gibi ilk 1/8 lik bölgede $y = 4 - 2x$ ve $z = 6$ düzlemleri ile sınırlı D prizmasının hacmini üç katlı integrali kullanarak bulunuz.



$$V = \iiint_D dV = \int_0^6 \int_0^2 \int_0^{4-2x} dy\,dx\,dz$$

$$= \int_0^6 \int_0^2 (4-2x)\,dx\,dz = \int_0^6 (4x - x^2)\Big]_0^2 dz$$

$$= \int_0^6 (8-4-0)\,dz = 4\int_0^6 dz = 4 \cdot 6 = 24 \text{ br}^3.$$

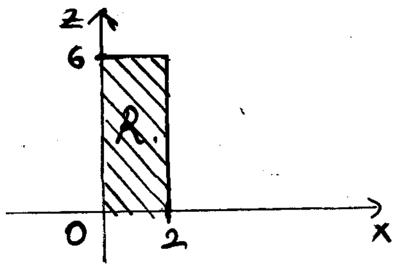
Veya

$$V = \iiint_D dV = \int_0^6 \int_0^4 \int_0^{2-y/2} dx\,dy\,dz = 24 \text{ br}^3.$$

Veya

$$V = \iiint_D dV = \int_0^2 \int_0^{4-2x} \int_0^6 dz\,dy\,dx = 24 \text{ br}^3$$

(veya diğer sıralamalara göre)



xz-düzlemindeki izdüşümü.

b) (10P) $\displaystyle\int_0^1 \int_0^{2-x} \int_0^{2-x-y} dz\,dy\,dx = ?$

$$= \int_0^1 \int_0^{2-x} (2-x-y)\,dy\,dx = \int_0^1 \left(2y - xy - \frac{y^2}{2}\right]_0^{2-x} dx$$

$$= \int_0^1 \left(2(2-x) - x(2-x) - \frac{(2-x)^2}{2}\right) dx = \int_0^1 \left(4 - 2x - 2x + x^2 - \cancel{2} + \cancel{2x} - \frac{x^2}{2}\right) dx$$

$$= \int_0^1 \left(2 - 2x + \frac{x^2}{2}\right) dx = \left(2x - x^2 + \frac{x^3}{6}\right]_0^1$$

$$= \cancel{2} - \cancel{1} + \frac{1}{6} - 0$$

$$= \boxed{\frac{7}{6}}$$

5- **a) (10P)** Aşağıda verilen ifadelerin **doğru** ya da **yanlış** olup olmadığını belirleyiniz.

(i) $f_x(a,b)=0$, $f_y(a,b)=0$ **ise** f, (a,b) **noktasında bir yerel ekstremum değerine sahiptir.** (YANLIŞ)

(ii) $a \le t \le b$ **olmak üzere** $\mathbf{r}(t)=x(t)\mathbf{i}+y(t)\mathbf{j}+z(t)\mathbf{k}$ **düzgün eğrisinin uzunluğu** $L=\int_a^b \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2+\left(\frac{dy}{dt}\right)^2}$ **dir.** (YANLIŞ)

(iii) $\int_0^1 \int_3^4 \left(x^2+\sin y\right)dxdy=\int_3^4 \int_0^1 \left(x^2+\sin y\right)dydx$ **dir.** (DOĞRU)

(iv) $F(x,y,z)=z+x^3+\ln(x+z)+y^2=26$ **ise** $\left.\frac{\partial z}{\partial x}\right|_{(0,5,1)}=-\frac{1}{2}$ **dir.** (DOĞRU)

b) (10P) Aşağıdaki boşlukları doldurunuz.

(i) $f(x,y) = x^2 y + \sin xy$ **nin** $(0,1)$ **noktasında** $\mathbf{u} = \frac{1}{\sqrt{2}}\mathbf{i} + \frac{1}{\sqrt{2}}\mathbf{j}$ **yönündeki türevi**

$D_{\mathbf{u}} f|_{(0,1)} =$ .... $\frac{1}{\sqrt{2}}$ .... **dir.**

$D_u f = \nabla f \cdot u$

$= \left(\frac{\partial}{\partial x}(x^2y + \sin xy)i + \frac{\partial}{\partial y}(x^2y + \sin xy)j\right) \cdot u$

$= \left[(2xy + y\cos xy)i + (x^2 + x\cos xy)j\right] \cdot \left(\frac{1}{\sqrt{2}}i + \frac{1}{\sqrt{2}}j\right)$

$D_u f|_{(0,1)} = (i + 0j) \cdot \left(\frac{1}{\sqrt{2}}i + \frac{1}{\sqrt{2}}j\right) = \frac{1}{\sqrt{2}}$

(ii) $\mathbf{r}(t) = (\tan t)\mathbf{i} + (2t^2)\mathbf{j} + (e^t)\mathbf{k}$ **olduğuna göre**

$\left.\frac{d\mathbf{r}}{dt}\right|_{t=0} = \sec^2 t\, i + 4t\, j + e^t k$ **dir.**

$= i + k$

(iii) $f(x,y) = \sqrt{9 - x^2 - y^2}$ **ise** f **nin tanım kümesi**

$x^2 + y^2 \leq 9$ olan (x,y) noktalarının **dir.**
kümesidir

(iv) $f(x,y,z) = x + y^2 + z^2 = 6$ **yüzeyinin** $p_0 = (1,2,1)$ **noktasındaki teğet düzlemi**

.... $x + 4y + 2z = 11$ .... **dir.**