Öğrenci Bilgileri

Numarası

Adı Soyadı

Fakülte

Bölüm

Oturum Bilgileri

Yerleşke **Salon**

Bina **Sıra No**

Sorular

MAT-102 MATEMATİK -II FİNAL SINAVI

1	2	3	4	5	TOPLAM	GİRMEDİ

İmza:

SINAV SÜRESİ 90 DAKİKADIR.
İLK 30 DAKİKA SINAVDAN ÇIKMAK YASAKTIR.

BAŞARILAR...

1- a) (8P) $\lim_{n\to\infty}(-1)^n \dfrac{\cos n}{n^2} = ?$ Her $n\in\mathbb{N}$ için $-1 \le \cos n \le 1$ ve

$\left|(-1)^n \dfrac{\cos n}{n^2}\right| \le \dfrac{1}{n^2}$ olur. $\lim_{n\to\infty} \dfrac{1}{n^2} = 0$ olduğundan

sıkıştırma teoreminden $\lim_{n\to\infty} \left|(-1)^n \dfrac{\cos n}{n^2}\right| = 0.$

$\Rightarrow \lim_{n\to\infty} (-1)^n \dfrac{\cos n}{n^2} = 0.$

b) (8P) $\sum_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{[\ln(n+1)]^n}$ **serisinin yakınsak olup olmadığını araştırınız.**

$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\dfrac{1}{[\ln(n+1)]^n}} = \dfrac{1}{\lim \ln(n+1)} = 0$. olup

$0<1$ olduğundan kök testinden

seri yakınsak olur.

c) (8P) $\sum_{n=0}^{\infty} x^n$ **kuvvet serisinden yararlanarak** $\dfrac{1}{(1+x)^2}$ **fonksiyonunun kuvvet serisini bulunuz.**

$\sum_{n=0}^{\infty} x^n = 1+x+x^2+\dots = \dfrac{1}{1-x}$ $(-1<x<1)$ olduğunu biliyoruz.

x yerine $-x$ yazarsak. $-1<x<1$ için.

$\sum_{n=0}^{\infty} (-x)^n = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^n = 1-x+x^2-x^3+\dots = \dfrac{1}{1+x}$ olur.

$-1<x<1$ olmak üzere. eşitliğin her iki yanının türevi alındığında.

$-\dfrac{1}{(1+x)^2} = -1+2x-3x^2+4x^3 - \dots = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n n x^{n-1}$

$\Rightarrow \dfrac{1}{(1+x)^2} = 1-2x+3x^2-4x^3+\dots = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} n x^{n-1}.$

2- a) (12P) $f(x,y)=3x^3+y^2-9x+4y$ **fonksiyonunun kritik noktalarını bulunuz. Bu noktaların yerel maksimum ya da yerel minimum ya da eyer noktası olup olmadığını belirleyiniz.**

$\frac{\partial f}{\partial x}=9x^2-9=0 \Leftrightarrow x^2-1=0 \Leftrightarrow x=-1,\ x=1$ olur.

$\frac{\partial f}{\partial y}=2y+4=0 \Leftrightarrow y=-2$

Buna göre f'nin kritik noktaları $\boxed{(-1,-2) \text{ ve } (1,-2)}$ olur.

$f_{11}(x,y)=18x$, $f_{22}(x,y)=2$, $f_{12}(x,y)=f_{21}(x,y)=0$

$(-1,-2)$ için $A=f_{11}(-1,-2)=-18$, $B=f_{12}(-1,-2)=0$, $C=f_{22}(-1,-2)=2$

$B^2-AC=0-(-18).2=36>0$ olduğundan $(-1,-2)$ f'nin $\boxed{\text{eyer}}$ noktasıdır.

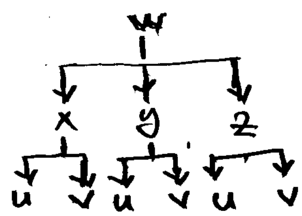
$(1,-2)$ için $A=f_{11}(1,-2)=18$, $B=f_{12}(1,-2)=0$, $C=f_{22}(1,-2)=2$

$B^2-AC=0-18.2=-36<0$ ve $A=18>0$ olduğundan

$(1,-2)$ f'nin $\boxed{\text{yerel minimum}}$ noktasıdır.

b) (12P) $x=3u+v,\quad y=3u-v,\quad z=u^2v$ **olmak üzere** $w=e^{xyz}$ **için;**

$\frac{\partial w}{\partial u}=?=\frac{\partial w}{\partial x}\cdot\frac{\partial x}{\partial u}+\frac{\partial w}{\partial y}\cdot\frac{\partial y}{\partial u}+\frac{\partial w}{\partial z}\cdot\frac{\partial z}{\partial u}$



$=yze^{xyz}(3)+xze^{xyz}(3)+xye^{xyz}(2uv)$

$=e^{xyz}(3yz+3xz+2xyuv)$

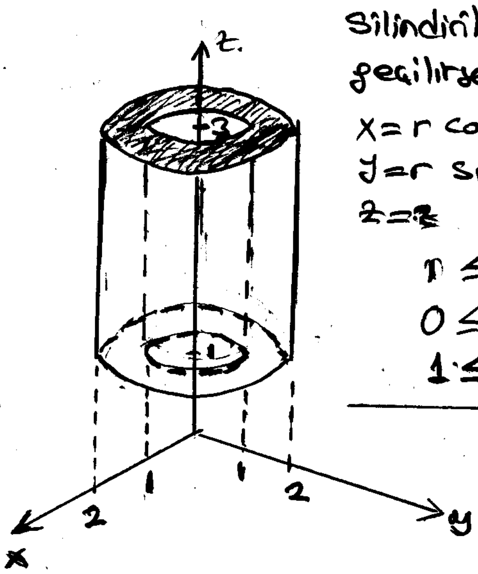
$\frac{\partial w}{\partial v}=?=\frac{\partial w}{\partial x}\cdot\frac{\partial x}{\partial v}+\frac{\partial w}{\partial y}\cdot\frac{\partial y}{\partial v}+\frac{\partial w}{\partial z}\cdot\frac{\partial z}{\partial u}$

$=yze^{xyz}(1)+xze^{xyz}(-1)+xye^{xyz}(u^2)$

$=e^{xyz}(yz-xz+xyu^2)$

3- a) (12P) $R;\ 1 \le x^2 + y^2 \le 4$ **içi boş silindiri ile** $1 \le z \le 3$ **düzlemleri arasında kalan bölge olmak üzere**

$$\iiint_R z\sin(x^2+y^2)\,dV = ? = \iiint_S z \sin r^2 \cdot r\,dr\,d\phi\,dz = \int_1^3 z\,dz \int_0^{2\pi} d\phi \int_1^2 r\sin r^2\,dr$$



Silindirik Koordinatlara geçilirse

$$\left.\begin{aligned} x &= r\cos\phi \\ y &= r\sin\phi \\ z &= z \end{aligned}\right\} \Rightarrow x^2+y^2=r^2$$

$1 \le r \le 2$

$0 \le \phi \le 2\pi$

$1 \le z \le 3$

$u = r^2$

$du = 2r\,dr$

$r=1 \Rightarrow u=1$

$r=2 \Rightarrow u=4$

$$= \frac{1}{2}\int_1^3 z\,dz \int_0^{2\pi} d\phi \int_1^4 \sin u\,du$$

$$= \frac{1}{2}\int_1^3 z\,dz \int_0^{2\pi} \left(-\cos u\Big|_1^4\right) d\phi$$

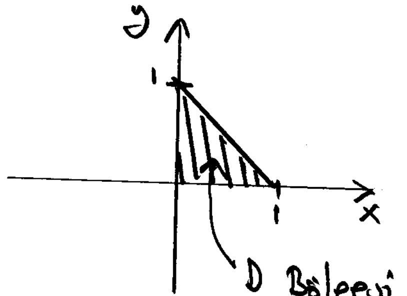
$$= \frac{1}{2}\int_1^3 z\,dz \int_0^{2\pi} (-\cos 4 + \cos 1)\,d\phi$$

$$= \frac{(\cos 1 - \cos 4)}{2}\int_1^3 z\,dz \int_0^{2\pi} d\phi$$

$$= \frac{(\cos 1 - \cos 4)}{\cancel{2}}\,\cancel{2}\pi \underbrace{\int_1^3 z\,dz}_{\left(\frac{z^2}{2}\Big|_1^3\right) = \frac{9}{2}-\frac{1}{2} = \frac{8}{2} = 4}$$

$$= \boxed{4\pi(\cos 1 - \cos 4)}$$

b) (12P) $0 \le x \le 1$ **ve** $0 \le y \le 1-x$ **ile verilen** D **bölgesi üstünde ve** $z = x^2$ **yüzeyinin altında kalan katı cismin hacmini bulunuz.**



$$V = \iint_D x^2\,dA = \int_0^1 \int_0^{1-x} x^2\,dy\,dx$$

$$= \int_0^1 x^2\,dx \int_0^{1-x} dy$$

$$= \int_0^1 x^2(1-x)\,dx = \int_0^1 (x^2 - x^3)\,dx$$

$$= \left(\frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4}\right)\Big|_0^1$$

$$= \frac{1}{3} - \frac{1}{4} = \boxed{\frac{1}{12}\ br^3}$$

4- a) (8P) $\mathbf{F}(x,y) = \sin y\mathbf{i} + x\cos y\,\mathbf{j}$ vektör alanını veriliyor. $\mathbf{F}$ korunumlu ise bir potansiyelini bulunuz.

$F_1(x,y) = \sin y$, $F_2(x,y) = x\cos y$

$\frac{\partial F_1}{\partial y} = \cos y = \frac{\partial F_2}{\partial x}$ dir. $F(x,y) = \nabla \phi(x,y)$ olacak biçimde $\phi(x,y)$ var olur.

O zaman $\frac{\partial \phi}{\partial x} = \sin y$ ve $\frac{\partial \phi}{\partial y} = x\cos y$ dır

$\frac{\partial \phi}{\partial x} = \sin y \Rightarrow \phi(x,y) = \int \sin y\,dx = x\sin y + C(y) \ldots \circledast$

$\circledast$ dan $\cancel{x\cos y} = \frac{\partial \phi}{\partial y} = \cancel{x\cos y} + c'(y) \Rightarrow c'(y) = 0$

$\boxed{\phi(x,y) = x\sin y + c}$ F nin $\Rightarrow c'(y) = C$ (sabit) olur.

bir potansiyeli olup F korunumludur.

b) (8P) C; saat yönünün tersinde $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} = 1$ elipsi ile verilen yol olmak üzere

$\oint_C \sin y\,dx + x\cos y\,dy = ?$

Elipsin belirlediği bölge basit bağlantılı ve C pürüzsüz, kapalı bir eğri ve F korunumlu olduğundan. $\oint \sin y\,dx + x\cos y\,dy = 0$ dır.

veya Green teoreminden

$$\oint_C \sin y\,dx + x\cos y\,dy = \iint_D \Big(\overbrace{\frac{\partial F_2}{\partial x} - \frac{\partial F_1}{\partial y}}^{0}\Big)\,dA = 0 .$$

c) (8P) C; $(0,0)$ noktasını $(1,1)$ noktasına bağlayan $y = \sqrt{x}$ eğrisi ise

$\int_C \sin y\,dx + x\cos y\,dy = ?$ F korunumlu ve $\phi(x,y) = x\sin y + c$

$F(x,y) = \sin y\,i + x\cos y\,j$ nin bir potansiyeli olduğundan.

$$\int_C \sin y\,dx + x\cos y\,dy = x\sin y\Big|_{(0,0)}^{(1,1)} = 1.\sin 1 - 0.\sin 0 = \boxed{\sin 1} \text{ olur.}$$

II. yol: F korunumlu olduğundan (0,0) ı (1,1) le birleştiren bütün yollar boyunca integral eşit olur.

(0,0) ı (1,1) le birleştiren $y = x$ doğrusunu alalım.

$$\int_C \sin y\,dx + x\cos y\,dy = \int_0^1 \sin x\,dx + \int_0^1 x\cos x\,dx = -\cos x\Big|_0^1 + x\sin x\Big|_0^1 - \int_0^1 \sin x\,dx$$

$$= -\cos 1 + \cos 0 + \sin 1 - \left(-\cos x\Big|_0^1\right)$$

$$= -\cos 1 + 1 + \sin 1 + \cos 1 - 1$$

$$= \boxed{\sin 1}$$

(Kısmi int. ile
$u = x \Rightarrow du = dx$
$dv = \cos x\,dx \Rightarrow v = \sin x$)

5- (24P) Aşağıdaki boşlukları doldurunuz.

$\mathbf{F}(x,y,z) = xy^2\mathbf{i} - yz^2\mathbf{j} + x^2z\mathbf{k}$ için;

(i) grad $\mathbf{F}(x,y,z) =$ $y^2 i - z^2 j + x^2 k$ .... dir.

(ii) div $\mathbf{F}(x,y,z) =$ $y^2 - z^2 + x^2$ .... dir.

(iii) curl $\mathbf{F}(x,y,z) =$ $\begin{vmatrix} i & j & k \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ xy^2 & -yz^2 & x^2z \end{vmatrix} = 2yzi - 2xzj - 2xyk$ .... dir.

$$f(x,y)=\frac{\sqrt{x}}{\ln(xy)-1}$$

(iv) **olduğuna göre** f **nin tanım kümesi** $x>0, y>0, xy \neq e$. **dır.**

$D_f=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : x>0, y>0, xy\neq e\}$

(v) R; **tabanı** $xy-$ **düzleminde** $x^2+y^2\leq 4$ **dairesi ve yüksekliği** 4 **olan bir silindir ise**

$$\iiint_R dV = .16\pi.... \quad \textbf{dır.}$$

(vi) $$\lim_{(x,y)\to(0,\pi/2)}\frac{\cos x\sin y}{1+x^2+\tan(xy)} = \frac{\cos 0 \sin \pi/2}{1+0+\underbrace{\tan 0}_{0}} = \boxed{1} \quad \textbf{dır.}$$

(vii) **u ile v** IR^3 **te iki vektör olmak üzere**

$(\mathbf{u}\times\mathbf{v})\bullet\mathbf{u} = .0...$, $\mathbf{v}\bullet(\mathbf{u}\times\mathbf{v}) = .0...$ **dır.**

(viii) IR^3 **te** $y=\sqrt{x^2+z^2}$ **ile verilen yüzey** .... **dır.**

uzantısı y-ekseni olan dairesel konidir.