## Öğrenci Bilgileri

**Numarası**

**Adı Soyadı**

**Fakülte**

**Bölüm**

## Oturum Bilgileri

**Yerleşke**

**Salon**

**Bina**

**Sıra No**

## Sorular

# TRAKYA ÜNİVERSİTESİ
# ZORUNLU ORTAK SERVİS DERSLERİ
# MAT102 – MATEMATİK-2
# 1. ARA SINAVI

| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | Toplam | GİRMEDİ |
|---|---|---|---|---|---|---|
| | | | | | | |

**AD-SOYAD :**

**NUMARA :**

**İMZA :**

**SINAV SÜRESİ 90 DAKİKADIR**

**BAŞARILAR**

**1- a) (10P)** $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{\cos^3 n}{3^n} = ?$

$\left( \forall x \in \mathbb{R} \text{ için } -1 \le \cos x \le 1 \Rightarrow -1 \le \cos^3 x \le 1 \right)$.

Her $n$ için $-\dfrac{1}{3^n} \le \dfrac{\cos^3 n}{3^n} \le \dfrac{1}{3^n}$ ve.

$\lim\limits_{n\to\infty} \left(-\dfrac{1}{3^n}\right) = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1}{3^n} = 0$ olduğundan

sandaviç (sıkıştırma) teoreminden

$\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{\cos^3 n}{3^n} = \boxed{0}$ bulunur.

**b) (10P)** $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \left[ \dfrac{(-1)^n}{2^n} + \dfrac{3^n}{5^{n+1}} \right]$ **serisi yakınsak ise değerini bulunuz.**

$\left( \left|\frac{-1}{2}\right| < 1 \text{ old. geom. seri yak.} \right)$

$\sum\limits_{n=0}^{\infty} \dfrac{(-1)^n}{2^n} = \dfrac{1}{1-\left(-\frac{1}{2}\right)} = \dfrac{1}{1+\frac{1}{2}} = \dfrac{2}{3}$.

$\sum\limits_{n=0}^{\infty} \dfrac{3^n}{5^{n+1}} = \sum\limits_{n=0}^{\infty} \dfrac{1}{5} \cdot \left(\dfrac{3}{5}\right)^n = \dfrac{1}{5} \cdot \dfrac{1}{1-\frac{3}{5}} = \dfrac{1}{\cancel{5}} \cdot \dfrac{\cancel{5}}{2} = \dfrac{1}{2}$.

$\left( \left|\frac{3}{5}\right| < 1 \text{ old. yak} \right)$

Her iki seri yakınsak olduğundan

$\sum\limits_{n=0}^{\infty} \left[ \dfrac{(-1)^n}{2^n} + \dfrac{3^n}{5^{n+1}} \right] = \sum\limits_{n=0}^{\infty} \dfrac{(-1)^n}{2^n} + \sum\limits_{n=0}^{\infty} \dfrac{3^n}{5^{n+1}}$

$= \underset{(2)}{\dfrac{2}{3}} + \underset{(3)}{\dfrac{1}{2}} = \boxed{\dfrac{7}{6}}$

**2- a) (10P)** $\sum_{n=1}^{\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n^2}$ **serisi yakınsak mı? Iraksak mı? Neden?**

Her $n \geq 1$ için $\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n^2} > 0$ olup

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n^2}} = \lim_{n\to\infty} \left(1+\frac{1}{n}\right)^{n^{\cancel{2}}/\cancel{n}} = \lim_{n\to\infty} \left(1+\frac{1}{n}\right)^{n} = e > 1$$

olduğundan kök testinden seri IRAKSAK olur.

**b) (10P)** $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x-1)^n}{\sqrt{n}}$ **serisinin yakınsaklık yarıçapını ve yakınsaklık aralığını bulunuz.**

$\lim_{n\to\infty} \left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right| < 1$ olmalı. Buna göre

$$\lim_{n\to\infty} \left|\frac{(x-1)^{n+1}}{\sqrt{n+1}} \cdot \frac{\sqrt{n}}{(x-1)^n}\right| = |x-1| \lim_{n\to\infty} \sqrt{\frac{n}{n+1}} = |x-1| \sqrt{\underbrace{\lim_{n\to\infty} \frac{n}{n+1}}_{1}}$$

$$= |x-1| < 1$$

$\Leftrightarrow -1 < x-1 < 1 \Leftrightarrow 0 < x < 2$.

$x=0$ için; Seri, $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$ olup, alternatif seri testinden yakınsaktır.

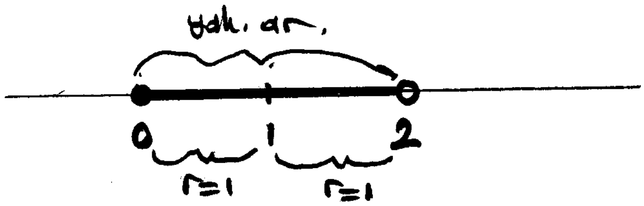
$\left( u_n = \frac{1}{\sqrt{n}} \geq 0, \ \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt{n}} = 0 \ \text{ve} \ u_n = \frac{1}{\sqrt{n}} \geq \frac{1}{\sqrt{n+1}} = u_{n+1} \right)$

$x=2$ için; seri $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{1/2}}$ Iraksak. (P-seri testi $p=\frac{1}{2}<1$ olduğundan)

Buna göre serinin yakınsaklık aralığı

$0 \leq x < 2$.

Yakınsaklık yarıçapı 1 dir.



**3- a) (10P)** $\sum_{n=0}^{\infty} x^n$ **kuvvet serisinden yararlanarak** $\dfrac{x}{(1-x^2)^2}$ **fonksiyonunun kuvvet serisini bulunuz. Yakınsaklık aralığını belirleyiniz.**

$-1<x<1$ için $\sum_{n=0}^{\infty} x^n = 1+x+x^2+x^3+\dots = \frac{1}{1-x}$ olduğunu biliyoruz.

$x$ yerine $x^2$ yazdığımızda;

$0 \le x^2 < 1 \Rightarrow -1<x<1$ için.

$\sum_{n=0}^{\infty} x^{2n} = 1+x^2+x^4+\dots = \frac{1}{1-x^2}$. $-1<x<1$ için terim terim türev alındığında;

$\sum_{n=1}^{\infty} 2n\,x^{2n-1} = 2x+4x^3+\dots = \frac{2x}{(1-x^2)^2}$ olur. Her iki yanı 2 ile bölersek;

$-1<x<1$ için $\frac{x}{(1-x^2)^2} = 1+2x^3+3x^5+\dots = \sum_{n=1}^{\infty} n\,x^{2n-1}$ olur.

Bu serinin yakınsaklık aralığı $-1<x<1$ ve yak. yarıçapı da $R=1$ olur.

**b) (10P)** $\begin{cases} x = t+e^t \\ y = 1-e^t \end{cases}$ **parametrik denklemi ile verilen eğriye,** $t=0$ **değerinin tanımladığı** $(x,y)$ **noktasında teğet olan doğrunun denklemini bulunuz.**

$t=0$ için; $x = 0+e^0 = 1$, $y = 1-e^0 = 0$ dır.

$\frac{dx}{dt} = 1+e^t$ ve $\frac{dy}{dt} = -e^t$ olduğundan

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}} = \frac{-e^t}{1+e^t} \Rightarrow \left.\frac{dy}{dx}\right|_{t=0} = \frac{-e^0}{1+e^0} = \boxed{\frac{-1}{2}}$$ olur.

Buna göre $(1,0)$ noktasından geçen teğet doğrusunun denklemi:

$$y-0 = \left(\left.\frac{dy}{dx}\right|_{t=0}\right)(x-1)$$

$$\Rightarrow y = -\frac{1}{2}(x-1) \Rightarrow \boxed{y = -\frac{1}{2}x+\frac{1}{2}}$$ bulunur.

**4- a) (10P)** $\mathbf{u} = 3\mathbf{i} - 2\mathbf{j} + \mathbf{k}$, $\mathbf{v} = 2\mathbf{j} + 3\mathbf{k}$, **vektörlerine dik bir birim vektör bulunuz.**

uxv vektörünün her iki vektörede dik olduğunu biliyoruz.

$$u \times v = \begin{vmatrix} i & \hat{j} & k \\ 3 & -2 & 1 \\ 0 & 2 & 3 \end{vmatrix} = (-6-2)i - (9-0)\hat{j} + (6+0)k = -8\hat{i} - 9\hat{j} + 6k$$

$$|u \times v| = \sqrt{64+81+36} = \sqrt{181}$$ Buna göre u ve v vektörlerine dik olan birim vektör;

$$\frac{1}{\sqrt{181}}(-8\hat{i} - 9\hat{j} + 6k) = -\frac{8}{\sqrt{181}}\hat{i} - \frac{9}{\sqrt{181}}\hat{j} + \frac{6}{\sqrt{181}}k$$ olur.

**b) (10P)** $\mathbf{u} = 2\mathbf{i} - \mathbf{j} + 2\mathbf{k}$, $\mathbf{v} = a\mathbf{i} + 2\mathbf{j} + \mathbf{k}$ **vektörleri arasındaki açının** $\pi/3$ **olması için** $a$ **nın alabileceği değerler ne olur?**

$u \cdot v = |u| \cdot |v| \cos\theta$ dır. $\theta = \frac{\pi}{3}$ olmasını istiyoruz.

$\cos\frac{\pi}{3} = \frac{1}{2}$,

$u \cdot v = 2a - 2 + 2 = 2a$, $|u| = \sqrt{4+1+4} = 3$, $|v| = \sqrt{a^2+4+1} = \sqrt{a^2+5}$

olup, buna göre

$$2a = 3 \cdot \sqrt{a^2+5} \cdot \frac{1}{2} \Leftrightarrow 4a = 3\sqrt{a^2+5}$$

$$\Leftrightarrow 16a^2 = 9(a^2+5) \Leftrightarrow 16a^2 = 9a^2 + 45$$

$$\Leftrightarrow 7a^2 = 45 \qquad \Leftrightarrow a^2 = \frac{45}{7}$$

$$\Leftrightarrow a = \mp\sqrt{\frac{45}{7}}$$

**5-** **a) (10P)** Aşağıda verilen ifadelerin **doğru** ya da **yanlış** olup olmadığını belirleyiniz.

**(i)** $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ **serisi yakınsak ise,** $\{S_n\}$ **serinin kısmi toplamlar dizisi olmak üzere**

$\lim_{n\to\infty} S_n = 0$ **dir.** ( YANLIŞ )

**(ii)** $\{a_n\}$ **dizisi sınırlı ve monoton ise yakınsak bir dizidir.** ( DOĞRU )

**(iii)** $\mathbf{u}$ **ile** $\mathbf{v}$ **vektörleri paralel ise** $\mathbf{u} \bullet \mathbf{v} = 0$ **dır.** ( YANLIŞ )

**(iv)** $z = x^2 + 4y^2$ **denklemi uzayda bir eliptik paraboloidi belirler.** ( DOĞRU )

**(v)** **Alterne seri ıraksaktır.** ( YANLIŞ )

**b) (10P) Aşağıdaki boşlukları doldurunuz.**

**(i) Başlangıç noktası** $P(1,3,-2)$ **ve bitiş noktası** $Q(2,0,-1)$ **olan vektör**

$\overrightarrow{PQ} =$ ..i - 3j + k.. **dir.**

**(ii)** $x^2 + y^2 + z^2 - 4x + 2\sqrt{2}\,y + 5 = 0$ **denklemi,**

**merkezi** (2 , $-\sqrt{2}$ , 0) **ve yarıçapı** ..1.... **olan bir küre belirler.**

**(iii) Kutupsal koordinatlardaki denklemi** $r^2 \sin^2\theta - r^2\cos^2\theta = 1$ **olan eğrinin**

**kartezyen koordinatlardaki denklemi** ...$y^2 - x^2 = 1$... **dir.**

**(iv)** $A(-2,0,5)$ **noktasından geçen ve normali** $\mathbf{n} = 3\mathbf{i} - 4\mathbf{j} + \mathbf{k}$ **olan düzlemin**

**denklemi** $3(x+2) - 4y + (z-5) = 0$ **dir.**

veya $3x - 4y + z = -1$

$\cos(\underbrace{\lim_{n\to\infty} a_n}_{}) = \cos 0 = 1$, $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$

**(v)** $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ **serisi yakınsak bir seri ise** $\lim_{n\to\infty}\cos(a_n) =$ ........................................ **dir.**