23/11/2013

MAT-101 MATEMATİK -I DERSİ II. ARASINAVI

Adı ve Soyadı:
İmza :
Bölümü :

BAŞARILAR

1	2	3	4	5	Toplam

1- $f(x)=\begin{cases} x^2 & : x<0 \\ \cos x & : 0\le x<\pi \\ -x/\pi & : x\ge \pi \end{cases}$ foksiyonu veriliyor.

a) (10P) f fonksiyonu $x=0$ ve $x=\pi$ noktalarında sürekli mi? Neden?

$\lim_{x\to 0^-} f(x)=\lim_{x\to 0^-} x^2 = 0 \neq \lim_{x\to 0^+} f(x)=\lim_{x\to 0^+}\cos x=\cos 0=1$

olduğundan limit yok $\Rightarrow$ $x=0$ da f sürekli değil.

$\lim_{x\to \pi^-} f(x)=\lim_{x\to \pi^-}\cos x=\cos\pi=-1=\lim_{x\to \pi^+} f(x)=\lim_{x\to \pi^+} -\frac{x}{\pi}=\frac{-\pi}{\pi}=-1$

olup $\lim_{x\to \pi} f(x)=-1=f(\pi)$ olduğundan $x=\pi$ de f sürekli

b) (10P) f fonksiyonu $x=0$ ve $x=\pi$ noktalarında türevlenebilir mi? Neden?

$x=0$ da f sürekli olmadığından türevide yoktur.

$$f'_+(\pi)=\lim_{h\to 0^+}\frac{f(\pi+h)-f(\pi)}{h}=\lim_{h\to 0^+}\frac{-\frac{\pi+h}{\pi}-(-1)}{h}=\lim_{h\to 0^+}\frac{\cancel{-\pi}-h+\cancel{\pi}}{\pi\cdot h}$$

$$=\lim_{h\to 0^+}-\frac{\cancel{h}}{\pi\cancel{h}}=-\frac{1}{\pi}.$$

$$f'_-(\pi)=\lim_{h\to 0^-}\frac{f(\pi+h)-f(\pi)}{h}=\lim_{h\to 0^-}\frac{\cos(\pi+h)+1}{h}\overset{\text{L'Hsp.}}{=}\lim_{h\to 0^-}\frac{-\sin(\pi+h)}{1}=0.$$

($\frac{0}{0}$ bel. var)

$f'_+(\pi)\neq f'_-(\pi)$ olduğundan $x=\pi$ de türevlenemez.

c) (8P) $\int_{-1}^{2\pi} f(x)dx=?$ 1

$$=\int_{-1}^{0} f(x)\,dx+\int_{0}^{\pi} f(x)\,dx+\int_{\pi}^{2\pi} f(x)\,dx$$

$$=\int_{-1}^{0} x^2dx+\int_{0}^{\pi}\cos x\,dx+\int_{\pi}^{2\pi}\frac{-x}{\pi}\,dx$$

$$=\left(\frac{x^3}{3}\right)\Big|_{-1}^{0}+(\sin x)\Big|_{0}^{\pi}-\frac{1}{\pi}\left(\frac{x^2}{2}\right)\Big|_{\pi}^{2\pi}$$

$$=\left(0-\frac{(-1)^3}{3}\right)+(\sin\pi-\sin 0)-\frac{1}{2\pi}(4\pi^2-\pi^2)=\frac{1}{3}-\frac{1}{2\cancel{\pi}}3\pi^{\cancel{2}}$$

$$=\frac{1}{3}-\frac{3\pi}{2}$$

2- a) (8P) $x = y + \int_1^{\ln x} \sin e^t\,dt$ olduğuna göre y' ~~türevini~~ bulunuz.

$1 = y' + \sin(e^{\ln x}) \cdot \frac{1}{x} \Rightarrow 1 = y' + \frac{\sin x}{x}$.

$\Rightarrow \boxed{y' = 1 - \frac{\sin x}{x}}$ olur.

b) (8P) $\int_{-\pi}^{\pi} \frac{\cos x^2 \sin^3 x}{1+x^2}dx = ?$ $\quad f(x) = \frac{\cos x^2 \sin^3 x}{1+x^2}$ diyelim

$f(-x) = \frac{\cos(-x)^2 \sin^3(-x)}{1+(-x)^2} = -\frac{\cos x^2 \cdot \sin^3 x}{1+x^2} = -f(x)$

olduğundan f tek fonksiyon $\Rightarrow \int_{-\pi}^{\pi} \frac{\cos x^2 \sin^3 x}{1+x^2}dx = 0$

c) (8P) $\int_0^{\ln\sqrt{2}} \frac{1}{e^{2x}}dx = ?$

$= \int_0^{\ln\sqrt2} e^{-2x}dx = \left(-\frac{e^{-2x}}{2}\right)\Big|_0^{\ln\sqrt2} = -\frac{1}{2}\left(e^{-2(\ln\sqrt2)} - e^0\right)$

$= -\frac12\left(e^{\ln\left(\frac{1}{\sqrt2}\right)^2} - 1\right) = -\frac12\left(\frac12 - 1\right) = -\frac12\left(-\frac12\right) = \boxed{\frac14}$

3- (8P) a) $\int \cos(\cos^2 x)\sin(2x)dx = ?$

$(u = \cos^2 x \Rightarrow du = -2\cos x.\sin x.dx \Rightarrow -du = \sin(2x)dx.)$

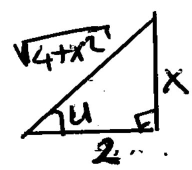
$\int \cos(\cos^2 x)\sin(2x)dx = -\int \cos u\,du = -\sin u + c$

$= -\sin(\cos^2 x) + c.$

b) (8P) $\int \frac{x}{\sqrt{4+x^2}}dx = ?$

$(u = 4+x^2 \Rightarrow du = 2x\,dx \Rightarrow \frac{du}{2} = x\,dx.)$

$\int \frac{x}{\sqrt{4+x^2}}dx = \frac12\int\frac{du}{\sqrt u} = \frac12\int u^{-1/2}du = \frac{1}{\cancel{2}}\cancel{2}u^{1/2}+c = \sqrt{4+x^2}+c$



II. yol. $x = 2\tan u \Rightarrow dx = 2\sec^2 u\,du.$

$\int\frac{x}{\sqrt{4+x^2}}dx = \int \frac{2\tan u \cdot 2\sec^2 u\,du}{2\sqrt{1+\tan^2 u}} = \int \frac{2\tan u \cdot \sec^2 u\,du}{\sec u} = 2\int \tan u \sec u\,du$

$= 2\sec u + c.$

$= \cancel{2}\frac{\sqrt{4+x^2}}{\cancel{2}}+c.$

c) (8P) $\int(1-2x+3x^2)\ln x\,dx = ?$ (Kısmi integral ile)

$(u = \ln x \Rightarrow du = \frac1x dx.$

$dv = (1-2x+3x^2)dx \Rightarrow v = x - x^2 + x^3)$

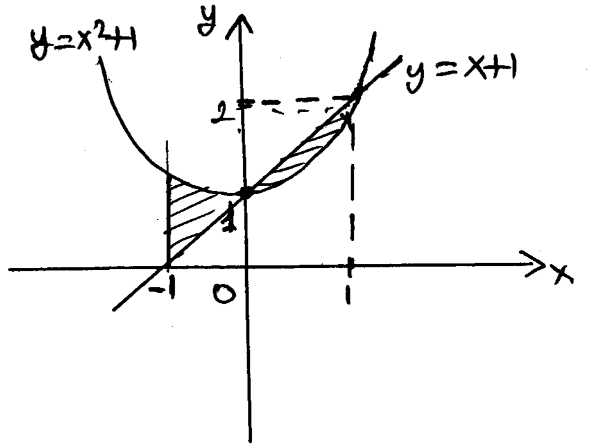
$\cancel{x}(1-x+x^2)$

$\int(1-2x+3x^2)\ln x\,dx = (x-x^2+x^3)\ln x - \int \frac{x-x^2+x^3}{\cancel{x}}dx$

$= (x-x^2+x^3)\ln x - \int(1-x+x^2)dx$

$= (x-x^2+x^3)\ln x - x + \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} + c.$

4- a) (10P) $y = x^2 + 1$ **eğrisi,** $y = x + 1$ **ve** $x = -1$ **doğrular ile sınırlı bölgeyi çizerek gösteriniz ve bu bölgenin alanını bulunuz.**



$x^2+1 = x+1$
$\Leftrightarrow x^2 = x \Leftrightarrow x^2 - x = 0$
$\Leftrightarrow x(x-1) = 0$
$\Leftrightarrow x=0$ veya $x=1$ dir.

$$A = \int_{-1}^{1} |x^2+1-(x+1)|\,dx = \int_{-1}^{0} (x^2+\cancel{1}-x-\cancel{1})\,dx + \int_0^1 (x+\cancel{1}-x^2-\cancel{1})\,dx$$
$$= \int_{-1}^{0} (x^2-x)\,dx + \int_0^1 (x-x^2)\,dx$$
$$= \left(\frac{x^3}{3} - \frac{x^2}{2}\right)\Big|_{-1}^{0} + \left(\frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3}\right)\Big|_0^1 = -\left(\frac{(-1)^3}{3} - \frac{(-1)^2}{2}\right) + \frac{1}{2} - \frac{1}{3}$$
$$= \cancel{\frac{1}{3}} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} - \cancel{\frac{1}{3}} = \boxed{1 \text{ br}^2}$$

b) (10P) $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{e^x + e^{-x}}$ **has olmayan integrali yakınsaksa değerini bulunuz.**

$$I = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{e^x+e^{-x}} = \underbrace{\int_{-\infty}^{0} \frac{dx}{e^x+e^{-x}}}_{I_1} + \underbrace{\int_0^{+\infty} \frac{dx}{e^x+e^{-x}}}_{I_2} = I_1 + I_2.$$

$$I_1 = \int_{-\infty}^{0} \frac{dx}{e^x+e^{-x}} = \lim_{r\to-\infty} \int_r^0 \frac{dx}{e^x+e^{-x}} = \lim_{r\to-\infty} \int_r^0 \frac{dx}{e^x + \frac{1}{e^x}}$$

$\left(u = e^x \Rightarrow du = e^x dx, \quad \int \frac{e^x dx}{e^{2x}+1} = \int \frac{du}{u^2+1} = \tan^{-1} u + c = \tan^{-1} e^x \right)$

$$= \lim_{r\to-\infty} \int_r^0 \frac{e^x dx}{e^{2x}+1} = \lim_{r\to-\infty} \left(\tan^{-1} e^x\right)\Big|_r^0$$
$$= \lim_{r\to-\infty} \Big(\underbrace{\tan^{-1} 1}_{\pi/4} - \tan^{-1} \underbrace{e^r}_{\to 0}\Big) = \frac{\pi}{4} - (0) = \frac{\pi}{4}$$

$\therefore I_1$ yakınsak

$$I_2 = \int_0^{\infty} \frac{dx}{e^x+e^{-x}} = \lim_{r\to\infty} \int_0^r \frac{dx}{e^x+e^{-x}} = \lim_{r\to\infty} \left(\tan^{-1} e^x\right)\Big|_0^r$$
$$= \lim_{r\to\infty} \left(\tan^{-1} e^r - \tan^{-1} 1\right) = \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{4}$$

$\therefore I_2$ yakınsak.

I_1 ve I_2 yak. $\Rightarrow$ I yakınsak ve

$$I = I_1 + I_2 = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{4} = \boxed{\frac{\pi}{2}} \text{ olur.}$$

5- $f(x)=\dfrac{x}{x^2-1}$ foksiyonu veriliyor.

a) (8P) f nin artan azalan olduğu aralıkları belirleyiniz. Varsa tüm asimptotlarını bulunuz.

$$f'(x)=\frac{(x^2-1)-x.2x}{(x^2-1)^2}=-\frac{(x^2+1)}{(x^2-1)^2}<0 \quad (\text{her } x\in\mathbb{R}\setminus\{-1,1\} \text{ için})$$

olduğundan tanım kümesi üzerinde azalandır.

$$\lim_{x\to-1^-}\frac{x}{x^2-1}=-\infty \quad \lim_{x\to-1^+}\frac{x}{x^2-1}=\infty \text{ ve } \lim_{x\to1^-}\frac{x}{x^2-1}=-\infty, \quad \lim_{x\to1^+}\frac{x}{x^2-1}=\infty$$

olduğundan $\boxed{x=1}$ ve $\boxed{x=-1}$ düşey asimtot.

$$\lim_{x\to\mp\infty}\frac{x}{x^2-1}=0$$ olduğundan $y=0$ yatay asimtot.

b) (8P) f nin varsa büküm noktalarını bulunuz ve iç bükeyliğini inceleyiniz.

$$f''(x)=-\frac{2x.(x^2-1)^2-(1+x^2).2(x^2-1).2x}{(x^2-1)^4}$$

$$=-\frac{2x\cancel{(x^2-1)}[(x^2-1)-2-2x^2]}{(x^2-1)^{\cancel{4}}}=-\frac{2x.(-3-x^2)}{(x^2-1)^3}$$

$$=\frac{2x(3+x^2)}{(x^2-1)^3}$$

x		-1	0	1
x	$-$	$-$	$+$	$+$
x^2-1	$+$	$-$	$-$	$+$
$f''(x)$	$-$	$+$	$-$	$+$

$(-\infty,-1)$ ve $(0,1)$ de $f''(x)<0$ old. iç bükeylik aşağı doğru.

$(-1,0)$ ve $(1,\infty)$ da $f''(x)>0$ old. iç bükeylik yukarı doğru.

$f''(x)=0 \Leftrightarrow x=0$ olup $x>0$ için $f''(x)<0$, $x<0$ için $f''(x)>0$

olduğundan $x=0$ nok. f inin büküm noktasıdır.

2

c) (8P) f nin grafiğini çiziniz.

$x=0 \Leftrightarrow y=0$.

$D_f=\mathbb{R}\setminus\{-1,1\}$ dir.