Öğrenci Bilgileri

Numarası

Adı Soyadı

Fakülte

Bölüm

Oturum Bilgileri

Yerleşke

Bina

Salon

Sıra No

Sorular

ZORUNLU ORTAK SERVİS DERSLERİ
MATEMATİK-II/MAT102 DERSİ FİNAL SINAVI

1	2	3	4	5	Toplam	GİRMEDİ

AD-SOYAD :

NUMARA :

İMZA :

SINAV SÜRESİ 90 DAKİKADIR,
BAŞARILAR...

1- a) (10P) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(n!)^2}{(3n)!}$ **serisi *yakınsak* mı? *Iraksak* mı? Neden?**

Oran testini uyguladığımızda

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{[(n+1)!]^2}{(3n+3)!}}{\frac{(n!)^2}{(3n)!}} = \lim_{n\to\infty} \frac{(n+1)^2\cancel{(n!)^2}\,\cancel{(3n)!}}{(3n+3)(3n+2)(3n+1)\cancel{(3n)!}\,\cancel{(n!)^2}}$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{(n+1)^2}{(3n+3)(3n+2)(3n+1)} = 0 < 1$$

olduğundan $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(n!)^2}{(3n)!}$ serisi $\boxed{\text{yakınsaktır}}$

b) (10P) $\mathbf{u} = \mathbf{i} + 2\mathbf{j} - \mathbf{k}$ **ve** $\mathbf{v} = -\mathbf{i} + 4\mathbf{k}$ **vektörlerinin her ikisine de *"dik"* , bir *"birim"* vektör bulunuz.**

$u \times v$ vektörü hem u ya hem de v ye diktir.

$$u \times v = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 1 & 2 & -1 \\ -1 & 0 & 4 \end{vmatrix} = 8i - (4-1)j + 2k = 8i - 3j + 2k$$

$\frac{u \times v}{|u \times v|}$ de u ve v ye dik olan birim vektör olur.

$|u \times v| = \sqrt{64 + 9 + 4} = \sqrt{77}$

Buna göre. $\frac{u \times v}{|u \times v|} = \frac{8}{\sqrt{77}} i - \frac{3}{\sqrt{77}} j + \frac{2}{\sqrt{77}} k$ olur.

2- a) (10P) $w = x^2 + y^2 + z^2$ **ve** $z = x^2 + y^2$ **ise** $\left(\frac{\partial w}{\partial z}\right)_y = ?$

w ve x bağımlı, y ve z bağımsız değişkenlerdir.

I. yolu: $x^2 = z - y^2 \Rightarrow w = z - \cancel{y^2} + \cancel{y^2} + z^2 = z + z^2.$

$\Rightarrow \left(\frac{\partial w}{\partial z}\right)_y = \boxed{1+2z}$

II. yolu: $\left(\frac{\partial w}{\partial z}\right)_y \overset{x,\ y \text{ ve } z\text{'ye bağlı.}}{=} 2x\frac{\partial x}{\partial z} + 2z \quad \dots ⊛$ ve $\frac{\partial z}{\partial z} = 1 = 2x \cdot \frac{\partial x}{\partial z} \Rightarrow \frac{\partial x}{\partial z} = \frac{1}{2x}$

$\frac{\partial x}{\partial z}$ 'yi ⊛ da yerine yazarsak.

$\left(\frac{\partial w}{\partial z}\right)_y = \cancel{2x} \cdot \frac{1}{\cancel{2x}} + 2z = \boxed{1+2z}$ bulunur.

b) (10P) $f(x,y,z) = 2x^2 + y^2 + 3z^2$ **fonksiyonunun** $2x - 3y - 4z = 49$ **kısıtlayıcısı altındaki "*minimum*" değerini bulunuz.**

$f(x,y,z) = 2x^2 + y^2 + 3z^2$, $g(x,y,z) = 2x - 3y - 4z - 49 = 0.$

$\nabla f = \lambda \nabla g$ ve $g(x,y,z) = 0.$

$\Rightarrow 4x\hat{i} + 2y\hat{j} + 6z\hat{k} = 2\lambda\hat{i} - 3\lambda\hat{j} - 4\lambda\hat{k}.$

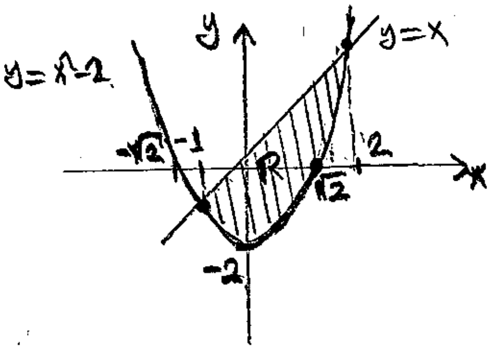
$$\Rightarrow \left.\begin{aligned} 4x &= 2\lambda \\ 2y &= -3\lambda \\ 6z &= -4\lambda \\ 2x-3y-4z &= 49 \end{aligned}\right\} \Rightarrow \begin{aligned} 2x &= \lambda \\ y &= -\tfrac{3}{2}\lambda \\ z &= -\tfrac{2}{3}\lambda \end{aligned} \Rightarrow \lambda + \frac{9}{2}\lambda + \frac{8}{3}\lambda = 49 \Rightarrow \frac{49\lambda}{6} = 49 \Rightarrow \boxed{\lambda = 6}$$

$\Rightarrow x = 3,\ y = -9,\ z = -4.$

f'nin minimum değeri

$f(3,-9,-4) = 2.9 + 81 + 3.16 = \boxed{147}$ olur.

3- a) (10P) Düzlemde $y=x^2-2$ parabolü ve $y=x$ doğrusu ile sınırlı bölgenin alanını iki katlı integrali kullanarak hesaplayınız.



$$A=\iint_R dA=\int_{-1}^{2}\int_{x^2-2}^{x} dy\, dx.$$

$$=\int_{-1}^{2}\left(y\right]_{x^2-2}^{x} dx=\int_{-1}^{2}(x-x^2+2)\, dx.$$

$$=\left(\frac{x^2}{2}-\frac{x^3}{3}+2x\right]_{-1}^{2}=\frac{4}{2}-\frac{8}{3}+4-\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-2\right)$$

$$=\frac{4}{2}-\frac{8}{3}+4-\frac{1}{2}-\frac{1}{3}+2=\boxed{\frac{9}{2}}$$

$y=x^2-2$ ve $y=x$ in kesişim noktaları

$x=x^2-2 \iff x^2-x-2=0$

$x_1=2,\ x_2=-1.$

b) (10P) Uzayda R; alttan $z=x^2+y^2$ paraboloidi ve üstten $z=4$ düzlemi ile sınırlı bölge olduğuna göre

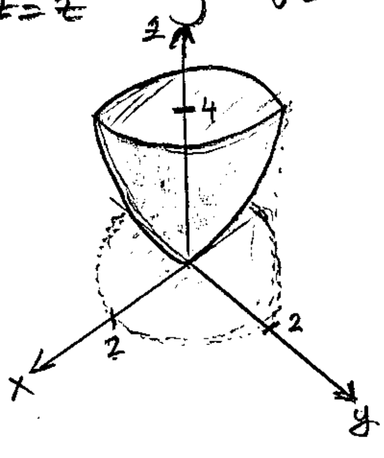
$$\iiint_R \left(x^2+y^2\right)^{3/2} dV=?\ \int_0^{2\pi}\int_0^2\int_{r^2}^4 (r^2)^{3/2}\, r\, dz\, dr\, d\theta=\int_0^{2\pi}\int_0^2\int_{r^2}^4 r^4\, dz\, dr\, d\theta.$$

silindirik koordinatlarda;

$$\left.\begin{array}{l} x=r\cos\theta \\ y=r\sin\theta \\ z=z \end{array}\right\} \Rightarrow \begin{array}{l} r^2\le z\le 4 \\ 0\le r\le 2 \\ 0\le\theta\le 2\pi \end{array}$$

$$=\int_0^{2\pi}\int_0^2\left(r^4 z\right]_{r^2}^4 dr\, d\theta=\int_0^{2\pi}\int_0^2 r^4(4-r^2)\, dr\, d\theta.$$

$$=\int_0^{2\pi}\int_0^2 (4r^4-r^6)\, dr\, d\theta=\int\left(\frac{4r^5}{5}-\frac{r^7}{7}\right]_0^2 d\theta.$$



$$=\int_0^{2\pi}\left(\frac{128}{5}-\frac{128}{7}\right) d\theta=\frac{256}{35}\int_0^{2\pi} d\theta=\frac{256}{35}\cdot 2\pi$$

$$=\frac{512\cdot\pi}{35}$$

Veya; $\iiint_R (x^2+y^2)^{3/2} dV=\int_0^4\int_0^{2\pi}\int_0^{\sqrt{z}} r^4\, dr\, d\theta\, dz$

$$=\frac{512}{35}\cdot\pi.$$

4- a) (10P) $\mathbf{F}(x,y,z)=(y+z)\mathbf{i}+(x+z)\mathbf{j}+(x+y)\mathbf{k}$ **vektör alanının tüm uzayda "*korunumlu*" olduğunu gösteriniz. $\mathbf{F}$ için bir f potansiyel fonksiyonu bulunuz.**

$M(x,y,z)=y+z$, $N(x,y,z)=x+z$, $P(x,y,z)=x+y$ diyelim.

$\frac{\partial P}{\partial y}=1=\frac{\partial N}{\partial z}$, $\frac{\partial M}{\partial z}=1=\frac{\partial P}{\partial x}$, $\frac{\partial N}{\partial x}=1=\frac{\partial M}{\partial y}$ olduğundan F korunumludur.

F tüm uzayda korunumludur. O halde $\nabla f=F$ olacak biçimde bir f fonksiyonu vardır. Yani $\frac{\partial f}{\partial x}i+\frac{\partial f}{\partial y}j+\frac{\partial f}{\partial z}=(y+z)i+(x+z)j+(x+y)k$ dır.

$\frac{\partial f}{\partial x}=y+z \Rightarrow f(x,y,z)=\int(y+z)\,dx=xy+xz+g(y,z)$ ...(I)

$\frac{\partial f}{\partial y}=x+\frac{\partial g}{\partial y}=x+z \Rightarrow \frac{\partial g}{\partial y}=z \Rightarrow g(y,z)=\int z\,dy=yz+h(z)$

(I) de yerine yazıldığında $f(x,y,z)=xy+xz+yz+h(z)$ ...(II) olur.

$\frac{\partial f}{\partial z}=x+y+h'(z)=x+y \Rightarrow h'(z)=0 \Rightarrow h(z)=C$ olur. II de yerine yazarsak F nin potansiyeli $\boxed{f(x,y,z)=xy+xz+yz+C}$ bulunur.

b) (10P) $\int_C (y+z)dx+(x+z)dy+(x+y)dz$ **integralini** $(0,0,0)$ **noktasını** $(1,1,1)$ **noktasına bağlayan herhangi bir** C **eğrisi üzerinde hesaplayınız.**

$F(x,y,z)=(y+z)i+(x+z)j+(x+y)k$ korunumlu olduğundan integralin değeri $(0,0,0)$ noktasını $(1,1,1)$ noktasına bağlayan C yolundan bağımsızdır.

Bunu göre.

$$\int_C (y+z)dx+(x+z)dy+(x+y)dz=\int_{(0,0,0)}^{(1,1,1)}(y+z)dx+(x+z)dy+(x+y)dz$$

$$=\left(xy+xz+yz\right]_{(0,0,0)}^{(1,1,1)}=1+1+1-0-0-0=\boxed{3}$$

bulunur.

5- **a) (10P)** Aşağıda verilen ifadelerin **doğru** ya da **yanlış** olup olmadığını belirleyiniz.

(i) **Sıfırdan farklı $\mathbf{u}$ ve $\mathbf{v}$ vektörleri için**

$\mathbf{u}\times\mathbf{v}=\mathbf{0}$ **ise $\mathbf{u}$, $\mathbf{v}$ ye diktir.** (YANLIŞ)

(ii) C**, uzaydaki bir D bölgesi içinde kapalı bir eğri olmak üzere**

$\oint_C \mathbf{F}d\mathbf{r}=0$ **ise $\mathbf{F}=\nabla f$ olacak biçimde D üzerinde tanımlı bir**

f **skaler fonksiyonu vardır.** (DOĞRU)

(iii) **Düzlemdeki bir $\mathbf{F}(x,y)=M(x,y)\mathbf{i}+N(x,y)\mathbf{j}$ vektör alanı için**

$(\mathrm{rot}\,\mathbf{F})\bullet\mathbf{k}=\dfrac{\partial N}{\partial x}-\dfrac{\partial M}{\partial y}$ **dir.** (DOĞRU)

(iv) $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ **yakınsak bir seri ise**

$\sum_{n=1}^{\infty}\cos(a_n)$ **de yakınsak bir seridir.** (YANLIŞ)

b) (10P) Aşağıdaki boşlukları doldurunuz.

(i) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{2n^2+1}{3-n+5n^2} =$ ......$\frac{2}{5}$........ dir.

(ii) $C;\ x^2+y^2=1$ **çember olduğuna göre**

$\oint\limits_C 2xy^3dx+(1+3x^2y^2)\,dy =$ ....0........ dir.

(iii) $\sum\limits_{n=0}^{\infty} 2\left(\dfrac{1}{3}\right)^n =$ ....3........ dir.

(iv) $f(x,y,z)=\cos(xy)+z^2$ ise $f_{zyx}(9,-1,13)=$ ....0........ dir.