Öğrenci Bilgileri

Numarası

Adı Soyadı

Fakülte

Bölüm

Oturum Bilgileri

Yerleşke **Salon**

Bina **Sıra No**

Sorular

TRAKYA ÜNİVERSİTESİ
ZORUNLU ORTAK SERVİS DERSLERİ
MATEMATİK-II/MAT102 DERSİ BÜTÜNLEME SINAVI

1	2	3	4	5	Toplam	GİRMEDİ

AD-SOYAD :

NUMARA :

BÖLÜM :

İMZA :

SINAV SÜRESİ 90 DAKİKADIR,
BAŞARILAR...

1- a) (6P) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{3n^2+2n+1}{5n^2+3}$ **serisi *yakınsak* mı? *Iraksak* mı? Neden?**

$\lim_{n\to\infty} \frac{3n^2+2n+1}{5n^2+3} = \frac{3}{5} \neq 0$ olduğundan

seri yakınsak değildir. (Iraksaktır).

($\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ yak $\Rightarrow \lim_{n\to\infty} a_n = 0$, Eğer $\lim_{n\to\infty} a_n \neq 0$ ise

$\sum a_n$ serisi Iraksak olur.

b) (6P) $\mathbf{u} = 2\mathbf{i} + a\,\mathbf{j} - 3\mathbf{k}$ **ve** $\mathbf{v} = -5\mathbf{i} - \mathbf{j} - 2\mathbf{k}$ **vektörlerinin bir birine *dik* olması için** a **ne olmalıdır? İşlem yaparak bulunuz.**

u ve v nin bir birine dik olması için $u \bullet v = 0$ olmalı.

Buna göre;

$u \bullet v = (2i + aj - 3k) \bullet (-5i - j - 2k) = 2.(-5) + a(-1) + (-3)(-2)$

$= -4 - a = 0 \quad \Rightarrow \boxed{a = -4}$ olmalı.

c) (8P) $A(0,0,1)$, $B(2,0,0)$, $C(0,3,0)$ **noktalarından geçen düzlemin denklemi bulunuz.**

$\overrightarrow{AB} = 2i - k \quad \overrightarrow{AC} = 3j - k$ olup.

$\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 2 & 0 & -1 \\ 0 & 3 & -1 \end{vmatrix} = 3i + 2j + 6k$ vektörü düzleme normaldir.

Noktalardan her hangi birine göre örneğin A'ya göre

$3(x-0) + 2(y-0) + 6(z-1) = 3x + 2y + 6z - 6 = 0$.

$\Rightarrow \boxed{3x + 2y + 6z = 6}$ istenen düzlem denklemi olur.

(B veya C'ye göre de yapılırsa aynı sonuç elde edilir)

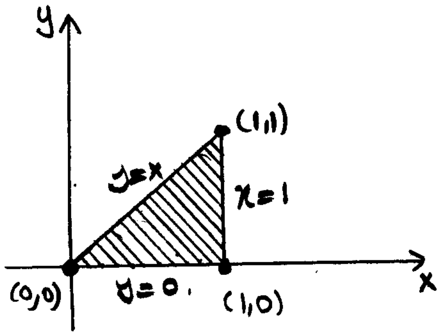
2- a) (10P) $f(x,y)=\ln\left(x^2+y^2\right)+\sin(xy)$ **ise** $f_{xy}(0,1)=?$

$$f_x(x,y)=\frac{2x}{x^2+y^2}+y\cos(xy) \Rightarrow$$

$$f_{xy}(x,y)=-\frac{4xy}{(x^2+y^2)^2}+\cos(xy)-yx\sin(xy) \quad \text{olup.}$$

$$f_{xy}(0,1)=-0+\cos(0)-0 \Rightarrow \boxed{1}$$

b) (10P) $f(x,y)=x(x-y)$ **fonksiyonunun, köşe noktaları (0,0), (1,0), (1,1) olan üçgen üzerindeki *maksimum* ve *minimum* değerlerini bulunuz.**



$$f(x,y)=x(x-y)=x^2-xy$$

$$\left.\begin{aligned} f_x(x,y)&=2x-y=0\\ f_y(x,y)&=-x=0\end{aligned}\right\} \Rightarrow \left.\begin{aligned} 2x&=y\\ x&=0\end{aligned}\right\} \Rightarrow y=0 \text{ olup.}$$

$(0,0)$ f'nin kritik noktasıdır ve $f(0,0)=0$ dır.
($(0,0)$ iç nokta değil).

<u>$y=x$ doğrusu üzerinde;</u> $f(x,y)=f(x,x)=0$ dır.

<u>$y=0$ doğrusu üzerinde:</u> $0\le x\le 1$ için;
$f(x,y)=f(x,0)=x^2$ olup $0\le x\le 1$ için;
1 f'nin maksimum değeri, 0 minimum değeri olur.

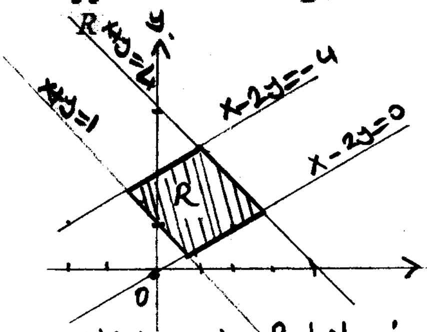
<u>$x=1$ doğrusu üzerinde;</u> $0\le y\le 1$ için:
$f(x,y)=f(1,y)=1-y$ olup $0\le y\le 1$ için
1, f'nin maksimum değeri ve 0 da f'nin minimum değeri olur.

Sonuç olarak f'nin bu üçgensel bölge üzerinde aldığı:
maksimum değeri : 1
minimum değeri : 0
olur.

3- a) (10P) R; **düzlemde** $x-2y=0,\quad x-2y=-4,\quad x+y=4$ **ve** $x+y=1$ **doğruları ile sınırlı bölge olmak üzere uygun bir değişken değişimi ile** $\iint 3xy\,dA$ **integralini hesaplayınız.**

$u = x+y$, $v = x-2y$ diyelim.

O zaman $x = \frac{1}{3}(2u+v)$ ve $y = \frac{1}{3}(u-v)$ olur.

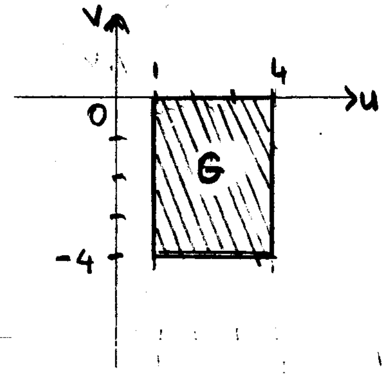


xy-düzleminde R bölgesi

R'nin sınırları		G'nin sınırları
$x+y=1$	$\Rightarrow$	$u=1$
$x+y=4$	$\Rightarrow$	$u=4$
$x-2y=0$	$\Rightarrow$	$v=0$
$x-2y=-4$	$\Rightarrow$	$v=-4$

ve $\dfrac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} \end{vmatrix}$

$= \begin{vmatrix} \frac{2}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & -\frac{1}{3} \end{vmatrix} = -\frac{2}{9} - \frac{1}{9} = -\frac{1}{3}.$



uv-düzleminde G bölgesi

Buna göre:

$$\iint_R 3xy\,dA = \iint_S 3\left[\tfrac{1}{3}(2u+v)\tfrac{1}{3}(u-v)\right]\left|-\tfrac{1}{3}\right| dv\,du$$

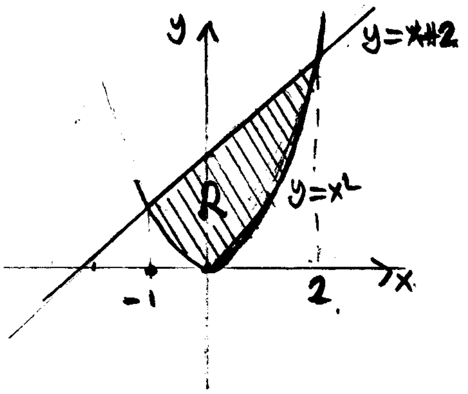
$$= \int_1^4\int_{-4}^0 \frac{1}{9}(2u^2 - uv - v^2)\,dv\,du = \frac{1}{9}\int_1^4 \left[2u^2v - \frac{uv^2}{2} - \frac{v^3}{3}\right]_{-4}^0 du$$

$$= \frac{1}{9}\int_1^4 \left(8u^2 + 8u - \frac{64}{3}\right) du = \frac{1}{9}\left[\frac{8u^3}{3} + 4u^2 - \frac{64}{3}u\right]_1^4$$

$$= \boxed{\frac{164}{9}}$$

b) (10P) $y = x^2$ **parabolü ve** $y = x+2$ **doğrusu ile sınırlanan** R **bölgesinin alanını bulunuz.**

$x^2 = x+2 \Rightarrow x^2 - x - 2 = 0 \Rightarrow (x-2)(x+1) = 0$, $x_1 = 2$, $x_2 = -1$



$$A(R) = \iint_R dA = \int_{-1}^{2}\int_{x^2}^{x+2} dy\,dx.$$

$$= \int_{-1}^{2}(x+2-x^2)\,dx.$$

$$= \left(\frac{x^2}{2} + 2x - \frac{x^3}{3}\right]_{-1}^{2} = \frac{4}{2} + 4 - \frac{8}{3} - \left(\frac{1}{2} - 2 + \frac{1}{3}\right)$$

$$= \frac{10}{3} - \left(-\frac{7}{6}\right) = \frac{27}{6} = \boxed{\frac{9}{2}}$$

Yada $A(R) = \int_0^1\int_{-\sqrt{y}}^{\sqrt{y}} dx\,dy + \int_1^4\int_{y-2}^{\sqrt{y}} dx\,dy = \boxed{\frac{9}{2}}$

4- a) (10P) $\displaystyle\int_0^2\int_0^x\int_0^{x+y} (y+2z)\,dzdydx = ?$

$$=\int_0^2\int_0^x \left[yz+z^2\right]_0^{x+y} dydx = \int_0^2\int_0^x \left(y(x+y)+(x+y)^2\right) dydx$$

$$=\int_0^2\int_0^x \left(xy+y^2+x^2+2xy+y^2\right) dydx = \int_0^2\int_0^x \left(3xy+2y^2+x^2\right) dydx$$

$$=\int_0^2 \left(\frac{3xy^2}{2}+\frac{2y^3}{3}+x^2y\right]_0^x dx = \int_0^2 \left(\frac{3x^3}{2}+\frac{2x^3}{3}+x^3\right) dx$$

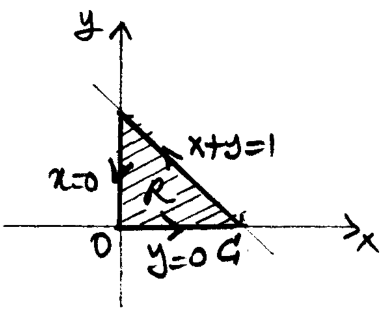
$$=\frac{19}{6}\int_0^2 x^3\,dx = \frac{19}{6}\left(\frac{x^4}{4}\right]_0^2 = \frac{19}{6}\left(\frac{16}{4}\right) = \boxed{\frac{38}{3}}$$

b) (10P) C; $x=0$, $x+y=1$, $y=0$ **ile sınırlı üçgen bölgenin sınırı olmak üzere Green teoremini kullanarak** $\displaystyle\oint_C \left(y^2dx+x^2dy\right)$ **integralinin değerini bulunuz.**

$M(x,y)=y^2$, $N(x,y)=x^2 \Rightarrow \dfrac{\partial M}{\partial y}=2y$ ve $\dfrac{\partial N}{\partial x}=2x$ dır.

Green teoreminden; $\displaystyle\oint_C M\,dx+N\,dy = \iint_R \left(\frac{\partial N}{\partial x}-\frac{\partial M}{\partial y}\right) dA$ olup.

$$\oint_C y^2dx+x^2dy = \iint_R (2x-2y)\,dydx = \int_0^1\int_0^{1-x}(2x-2y)\,dydx$$



$$=\int_0^1 \left(2xy-y^2\right]_0^{1-x} dx$$

$$=\int_0^1 \left(2x(1-x)-(1-x)^2\right) dx = \int_0^1 \left(2x-2x^2-1+2x-x^2\right) dx$$

$$=\int_0^1 \left(4x-3x^2-1\right) dx = \left(2x^2-x^3-x\right]_0^1$$

$$= 2-1-1 = \boxed{0}$$ bulunur.

5- **a) (10P)** Aşağıda verilen ifadelerin **doğru** ya da **yanlış** olup olmadığını belirleyiniz.

(i) Sıfırdan farklı $\mathbf{u}$ ve $\mathbf{v}$ vektörleri için

$\mathbf{u} \times \mathbf{v} = \mathbf{0}$ **ise $\mathbf{u}$, $\mathbf{v}$ ye paraleldir.**

(DOĞRU..)

(ii) $-1 < x < 1$ **için** $\dfrac{1}{1-x} = 1 + x - x^2 + x^3 - x^4 + \dots$ **dir.**

(YANLIŞ..)

(iii) Küresel koordinatlarda $\phi = \dfrac{\pi}{4}$ **bir koni yüzeyi belirler**

(DOĞRU...)

(iv) $f(x,y,z) = xye^z$ **fonksiyonunun** $(1,1,0)$ **noktasındaki en hızlı değişim oranı** $\sqrt{2}$ **dir.**

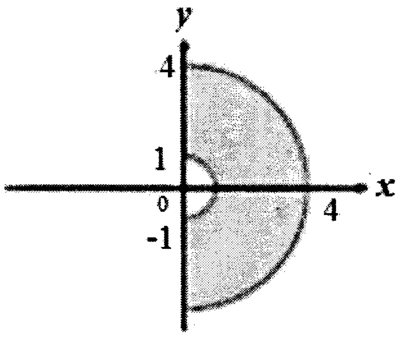
(YANLIŞ..)

b) (10P) Aşağıdaki boşlukları doldurunuz.

(i) $\mathbf{F}(x,y,z) = 2x^3\mathbf{i} + (x+y)\mathbf{j} + (2xyz)\mathbf{k}$ **ise**

$\operatorname{div}\mathbf{F} =$ $\nabla \cdot F = \frac{\partial M}{\partial x} + \frac{\partial N}{\partial y} + \frac{\partial P}{\partial z} = 6x^2 + 1 + 2xy$ **dir.**

(ii)



Şekildeki bölge kutupsal koordinatlarda $1 \leq r \leq 4$, $-\frac{\pi}{2} \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$ **... ile ifade edilir.**

(iii) $x^2 + y^2 + z^2 = 4$ **küresinin dış birim normal vektörü** $\dfrac{x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}}{2}$ **dir.**

(iv) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{\sin(x+y)}{x+y} =$ ....1........ **dir.**