Öğrenci Bilgileri

Numarası

Adı Soyadı

Fakülte

Bölüm

Oturum Bilgileri

Yerleşke **Salon**

Bina **Sıra No**

Sorular

ZORUNLU ORTAK SERVİS DERSLERİ
MATEMATİK-I / MAT101 DERSİ I. ARA SINAVI
24 EKİM 2015 – 10:30

1	2	3	4	5	Toplam	GİRMEDİ

İmza :

SINAV SÜRESİ 90 DAKİKADIR.
İLK 30 DAKİKA SINAVDAN ÇIKMAK YASAKTIR.

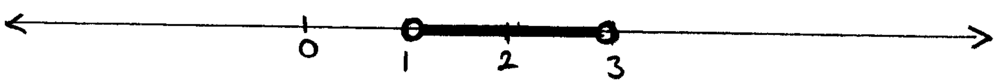
BAŞARILAR...

1- a) (10P) $\left|2-\dfrac{3}{x}\right|<1$ eşitsizliğini sağlayan x reel sayılarının kümesini belirleyiniz. Bu kümeyi sayı doğrusu üzerinde gösteriniz.

($x \neq 0$ olmalı.)

$$\left|2-\frac{3}{x}\right|<1 \iff -1<2-\frac{3}{x}<1$$
$$\iff -3<-\frac{3}{x}<-1$$
$$\iff 1>\frac{1}{x}>\frac{1}{3}$$
$$\iff 1<x<3$$

Ç.K $=(1,3)$

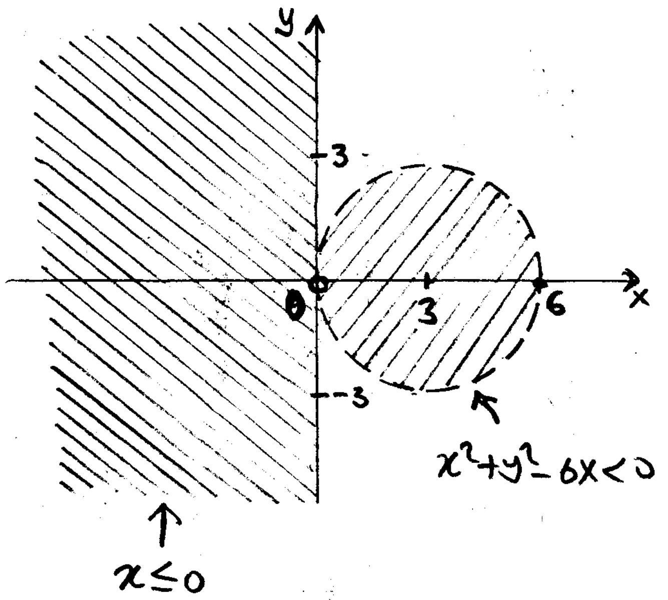


b) (10P)
$$x^2+y^2-6x<0,$$
$$x \leq 0$$

Eşitsizliklerinin her ikisini sağlayan (x,y) noktaların kümesinin belirlediği bölgeyi çizerek gösteriniz.

$x^2+y^2-6x<0 \iff (x-3)^2+y^2-9<0 \iff (x-3)^2+y^2<9$ olduğundan

$(3,0)$ merkezli $r=3$ yarıçaplı dairenin içi olur.

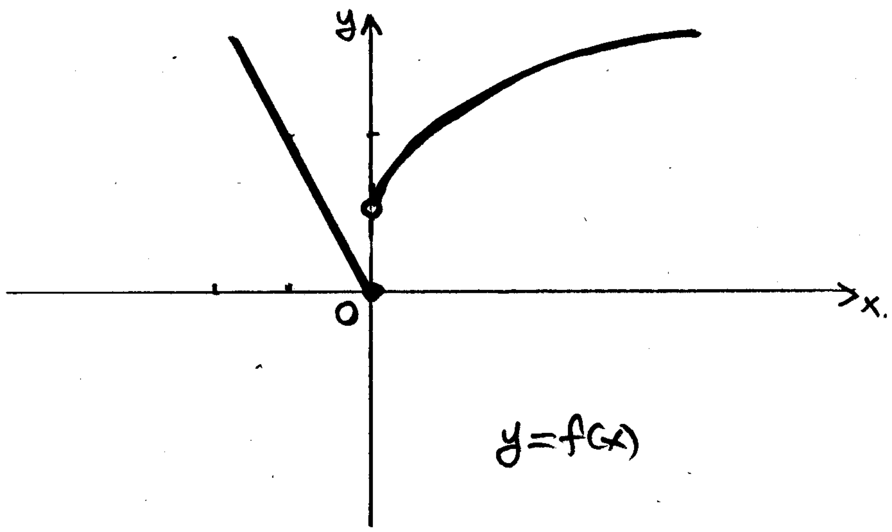


Şekilde görüldüğü gibi her iki eşitsizliğin sağlandığı (x,y) noktalarının kümesinin arakesiti ϕ kümedir.

Ç.K $=\phi$ olur.

2- $f(x)=\begin{cases}-2x & : x\le 0\\ \sqrt{x}+1 & : x>0\end{cases}$ fonksiyonu veriliyor.

a) (8P) f nin grafiğini çiziniz.



b) (6P) $\lim\limits_{x\to 0} f(x)$ limiti var mı? Neden? Eğer varsa bulunuz.

$$\left.\begin{aligned}\lim_{x\to 0^+} f(x) &= \lim_{x\to 0^+}(\sqrt{x}+1) = \sqrt{0}+1 = 1\\ \lim_{x\to 0^-} f(x) &= \lim_{x\to 0^-}(-2x) = 0\end{aligned}\right\}\text{ olup}$$

$\lim\limits_{x\to 0^+} f(x) \neq \lim\limits_{x\to 0^-} f(x)$ olduğundan $\lim\limits_{x\to 0} f(x)$ YOKTUR

c) (6P) f nin sürekli olmadığı noktaları bulunuz. Neden bu noktalarda sürekli olmadığını belirtiniz.

$x\le 0$ için $-2x$ her yerde sürekli (1. derece polinom)

$x>0$ için $\sqrt{x}+1$ her yerde sürekli ($\sqrt{x}$ tanım kümesinde sürekli)

f'nin tek bir süreksizlik noktası vardır o da $\boxed{x=0}$ dır.

çünkü $\lim\limits_{x\to 0} f(x)$ limiti yoktur.

3- (a) (7P) $\lim\limits_{x\to -1} \dfrac{1+x}{2-\sqrt{x^2+3}} = ?$ $\left(\left[\frac{0}{0}\right] \text{ belirsizliği var} \right)$

$$= \lim_{x\to -1} \frac{(1+x)\left(2+\sqrt{x^2+3}\right)}{\left(2-\sqrt{x^2+3}\right)\left(2+\sqrt{x^2+3}\right)} = \lim_{x\to -1} \frac{(1+x)\left(2+\sqrt{x^2+3}\right)}{4-(x^2+3)}$$

$$= \lim_{x\to -1} \frac{(1+x)\left(2+\sqrt{x^2+3}\right)}{1-x^2} = \lim_{x\to -1} \frac{\cancel{(1+x)}\left(2+\sqrt{x^2+3}\right)}{\cancel{(1+x)}(1-x)}$$

$$= \lim_{x\to -1} \frac{2+\sqrt{x^2+3}}{1-x} = \frac{2+\sqrt{(-1)^2+3}}{1-(-1)} = \frac{4}{2} = \boxed{2}$$

b) (7P) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x^3-2x+\tan 3x}{2x} = ?$ $\left(\left[\frac{0}{0}\right] \text{ belirsizliği var} \right)$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{x^3}{2x} + \lim_{x\to 0} \frac{-2x}{2x} + \lim_{x\to 0} \frac{\tan 3x}{2x}$$

$$= \underbrace{\lim_{x\to 0} \frac{x^2}{2}}_{=0} + \underbrace{\lim_{x\to 0} (-1)}_{=-1} + \underbrace{\lim_{x\to 0} \frac{\tan 3x}{2x}}_{=\frac{2}{3}} = 0-1+\frac{3}{2} = \boxed{\frac{1}{2}}$$

$$\left(\lim_{x\to 0} \frac{\tan 3x}{2x} = \lim_{x\to 0} \frac{\sin 3x}{\cos 3x}\cdot\frac{1}{2x} = \lim_{x\to 0} \frac{\sin 3x}{2x} \cdot \lim_{x\to 0} \frac{1}{\cos 3x} = \frac{3}{2} \lim_{x\to 0} \frac{\sin 3x}{3x} \cdot \lim_{x\to 0} \frac{1}{\cos 3x} = \frac{3}{2}(1)\cdot(1) = \frac{3}{2} \right)$$

c) (6P) $\lim\limits_{x\to -3} \dfrac{2-x^3}{\sqrt{f(x)}} = 0$ ise $\lim\limits_{x\to -3} f(x) = ?$

$$\lim_{x\to -3} \frac{2-x^3}{\sqrt{f(x)}} = \frac{\lim\limits_{x\to -3}(2-x^3)}{\lim\limits_{x\to -3}\sqrt{f(x)}} = \frac{2-(-3)^3}{\lim\limits_{x\to -3}\sqrt{f(x)}} = \frac{29}{\lim\limits_{x\to -3}\sqrt{f(x)}} = 0$$

olduğundan bu durum $\lim\limits_{x\to -3} \sqrt{f(x)} = \infty$ olması ile mümkündür. Fakat $\sqrt{x}$ fonksiyonu $x \geq 0$ noktalarında da tanımlı olacağından $\boxed{\lim\limits_{x\to -3} f(x) = \infty}$ olmalıdır.

4- a) (10P) $f(x)=\dfrac{7-x^5}{6+|x|^5}$ fonksiyonunun varsa asimptotlarını bulunuz.

$$\lim_{x\to\infty}\frac{7-x^5}{6+|x|^5} = \lim_{x\to\infty}\frac{7-x^5}{6+x^5} = \lim_{x\to\infty}\frac{\cancel{x^5}\left(\frac{7}{x^5}-1\right)}{\cancel{x^5}\left(\frac{6}{x^5}+1\right)} = \frac{-1}{1} = \boxed{-1}$$

$(x>0 \Rightarrow |x|=x)$

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{7-x^5}{6+|x|^5} = \lim_{x\to-\infty}\frac{7-x^5}{6-x^5} = \lim_{x\to-\infty}\frac{\cancel{x^5}\left(\frac{7}{x^5}-1\right)}{\cancel{x^5}\left(\frac{6}{x^5}-1\right)} = \frac{-1}{-1} = \boxed{1}$$

$(x<0 \Rightarrow |x|=-x)$

olduğundan

$\boxed{y=-1}$ ve $\boxed{y=1}$ doğruları f'nin yatay asimptotları olur.

Payın derecesi paydaya eşit olduğundan eğik asimptot yoktur.

Ayrıca $6+|x|^5>0$ olduğundan düşey asimptotu yoktur.

b) (10P) $\dfrac{1-\cos x}{1+\cos x}=\tan^2\left(\dfrac{x}{2}\right)$ eşitliğini gösteriniz.

$$\tan^2\left(\frac{x}{2}\right) = \frac{\sin^2\left(\frac{x}{2}\right)}{\cos^2\left(\frac{x}{2}\right)} = \frac{\frac{1-\cos\left[2\left(\frac{x}{2}\right)\right]}{2}}{\frac{1+\cos\left[2\left(\frac{x}{2}\right)\right]}{2}} = \frac{1-\cos x}{1+\cos x}$$

bulunur.

Burada; $\cos^2 x = \dfrac{1+\cos 2x}{2}$

$\sin^2 x = \dfrac{1-\sin 2x}{2}$

kullanıldı.

5-(20P) Aşağıdaki **boşlukları** doldurunuz.

(a) $f(x)=\begin{cases} x & : x<-2 \\ bx^2 & : x\geq -2 \end{cases}$ fonksiyonunun sürekli olması için $b=$ ...$\frac{-1}{2}$... olmalıdır.

(b) $x^2+y^2-4x+4y+4=0$ eşitliği merkezi (2, -2) ve yarıçapı $r=$ 2... olan bir çemberi gösterir.

(c) $f(x)=\sqrt{x}$ ise $g(x)=\cos^2 x$ olduğuna göre $(f\circ g)(x)=$ $\sqrt{\cos^2 x}=|\cos x|$ .... olup

tanım kümesi $(-\infty,\infty)$ .... ve görüntü (değer) kümesi $[0,1]$ .... dir.

(d) f sürekli bir fonksiyon olduğuna göre $\lim\limits_{x\to 0} f\left(\dfrac{x}{\sin x}\right)=$ $f(1)$ .... dir.

(e) $f(x)=x^2+1$ fonksiyonu veriliyor.

Aşağıda verilen ifadelerin **doğru** ya da **yanlış** olup olmadığını belirleyiniz.

i-) f, tek fonksiyondur. (YANLIŞ)

ii-) f, $(0,\infty)$ aralığında artandır. (DOĞRU)