

**ZORUNLU ORTAK SERVİS DERSLERİ  
MAT-101/ MATEMATİK -I DERSİ  
2016-2017 GÜZ DÖNEMİ FİNAL SINAVI**

**ADI ve SOYADI :**

**NUMARASI :**

**BÖLÜMÜ :**

**İMZA :**

**3.12.2017**

<b>1</b>	<b>2</b>	<b>3</b>	<b>4</b>	<b>5</b>	<b>TOPLAM</b>

**Sınav Süresi 90 Dakikadır.**

**BAŞARILAR**

1- a) (10P)  $x^3 + x^2y + \sqrt{y} = 1 + x$  kapalı fonksiyonunun  $\frac{dy}{dx}$  türevinin (0,1) noktasındaki değerini bulunuz.

$$\frac{d}{dx}(x^3 + x^2y + \sqrt{y}) = \frac{d}{dx}(1+x)$$

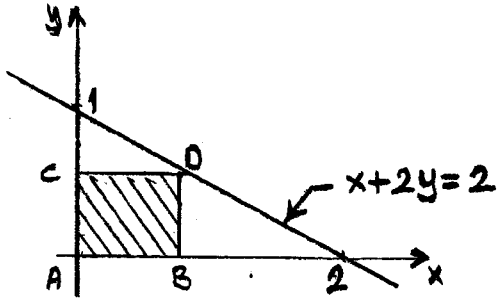
$$\Rightarrow 3x^2 + 2xy + x^2y' + \frac{1}{2\sqrt{y}} \cdot y' = 1$$

(0,1)'i yerine yazarsak;

$$0 + 0 + 0 + \frac{1}{2} \cdot y'|_{(0,1)} = 1 \Rightarrow y'|_{(0,1)} = 2 \text{ olur.}$$

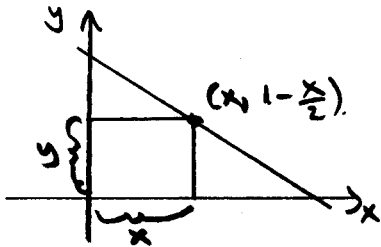
$\therefore \frac{dy}{dx}$  in (0,1) deki değeri  $\boxed{2}$  dir.

b) (10P) Şekildeki taralı dikdörtgenin maksimum alanlı olması için dikdörtgenin boyutları ne olmalıdır?



A ve B arasındaki uzaklığı  $x$   
A ve C arasındaki uzaklığı  $y$   
diyelim.

O zannın. O noktasındır.  
 $x + 2y = 2$  doğruya geçtiğinden  
 $y = 1 - \frac{x}{2}$  olur.



$$A = x \cdot y \text{ olup } \Rightarrow A(x) = x \cdot \left(1 - \frac{x}{2}\right) = x - \frac{x^2}{2}$$

A'nın tanım kümesi  $0 \leq x \leq 2$  yani  $[0, 2]$  aralığıdır.

A, sürekli ve  $[0, 2]$  kapalı, sınırlı olduğundan A maks. değerini uç noktalarda veya kritik noktada alır.

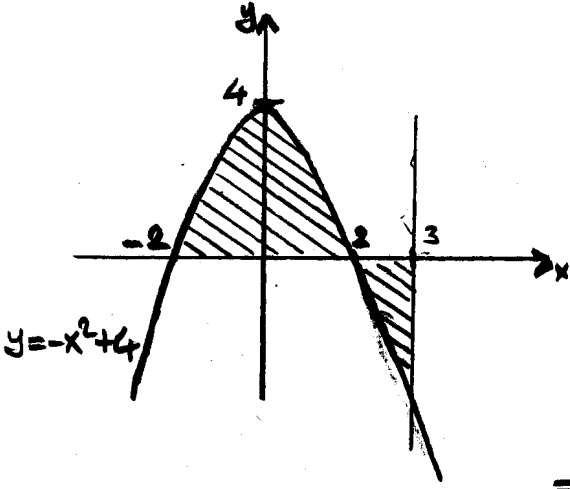
$$A'(x) = 1 - \frac{2x}{2} = 1 - x = 0 \Leftrightarrow x = 1$$

$\Rightarrow y = 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$  bulunur. Uç noktalarda alan 0 olduğundan  
Boyutlar  $x=1$  ve  $y=\frac{1}{2}$  olur.

Boyutlar  $x=1$  ve  $y=\frac{1}{2}$  olduğunda

en maksimum alan  $A = 1 \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{2} \text{ br}^2$  olur.

2- a) (10P)  $y = -x^2 + 4$  eğrisi,  $x$ - eksenini ve  $x = 3$  doğrusu ile sınırlı bölgelerin toplam alanını bulunuz.



$$A = \int_{-2}^3 |-x^2 + 4| dx$$

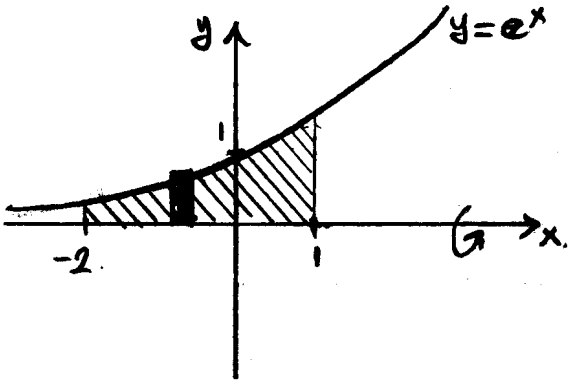
$$= \int_{-2}^2 (-x^2 + 4) dx + \int_2^3 (x^2 - 4) dx.$$

$$= \left[ -\frac{x^3}{3} + 4x \right]_{-2}^2 + \left[ \frac{x^3}{3} - 4x \right]_2^3$$

$$= \left[ \left( -\frac{8}{3} + 8 \right) - \left( \frac{8}{3} - 8 \right) \right] + \left[ \left( \frac{27}{3} - 12 \right) - \left( \frac{8}{3} - 8 \right) \right]$$

$$= -\frac{16}{3} + 16 - 3 + \frac{16}{3} = 13 \text{ br}^2.$$

b) (10P)  $y = e^x$  eğrisi,  $x$ - eksenini,  $x = -2$  ve  $x = 1$  doğruları arasında kalan bölgenin  $x$ - eksenini etrafında döndürülmesi ile oluşan döneel cismin hacmini bulunuz.



$$\Delta V_x = \pi \cdot r^2 \Delta x.$$

$$= \pi (e^x)^2 \Delta x.$$

$$V = \int_{-2}^1 \pi e^{2x} dx = \pi \int_{-2}^1 e^{2x} dx$$

$$= \pi \cdot \left[ \frac{e^{2x}}{2} \right]_{-2}^1$$

$$= \pi \left( \frac{e^2}{2} - \frac{e^{-4}}{2} \right)$$

$$= \frac{\pi}{2} \left( e^2 - \frac{1}{e^4} \right) \text{ br}^3.$$

3- (a) (10P)  $\int x \ln x dx = ?$

$$\left( \begin{array}{l} u = \ln x \Rightarrow du = \frac{1}{x} dx. \\ dv = x dx \Rightarrow v = \frac{x^2}{2} \end{array} \right)$$

$$\begin{aligned} \int x \ln x dx &= \frac{x^2}{2} \cdot \ln x - \frac{1}{2} \int \frac{x^2}{x} dx \\ &= \frac{x^2}{2} \cdot \ln x - \frac{1}{2} \int x dx \\ &= \boxed{\frac{x^2}{2} \cdot \ln x - \frac{x^2}{4} + C} \end{aligned}$$

b) (10P)  $\int_1^{\infty} \frac{x}{x^2+1} dx$  has olmayan integrali yakınsak mı? İraksak mı? Neden?

$$\begin{aligned} \int_1^{\infty} \frac{x}{x^2+1} dx &= \lim_{b \rightarrow \infty} \int_1^b \frac{x}{x^2+1} dx \\ &= \lim_{b \rightarrow \infty} \frac{1}{2} \int_1^b \frac{2x}{x^2+1} dx \\ &= \lim_{b \rightarrow \infty} \left( \frac{1}{2} \ln |x^2+1| \right)_1^b \quad \left( \frac{d}{dx} x^2+1 = 2x \right) \\ &= \lim_{b \rightarrow \infty} \left( \frac{1}{2} \ln |b^2+1| - \frac{1}{2} \ln 2 \right) \\ &= \infty \end{aligned}$$

olduğundan  $\int_1^{\infty} \frac{x}{x^2+1} dx$  **İRAKSAKTIR**

4-  $f(x) = \frac{x+3}{x-1}$  fonksiyonu veriliyor.

a) (5P)  $f$  nin tüm asimptotlarını bulunuz.

$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x+3}{x-1} = 1$  olduğundan  $y=1$   $f$  nin yatay asimptotudur.

$\lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{x+3}{x-1} = +\infty$   $\lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{x+3}{x-1} = -\infty$  olduğundan  $x=1$   $f$  nin dikey (dik) asimptotu olur.

b) (5P)  $f$  nin artan, azalan olduğu aralıkları bulunuz.

$$f'(x) = \frac{x-1-(x+3)}{(x-1)^2} = \frac{x-1-x-3}{(x-1)^2} = \frac{-4}{(x-1)^2} < 0 \text{ olduğundan.}$$

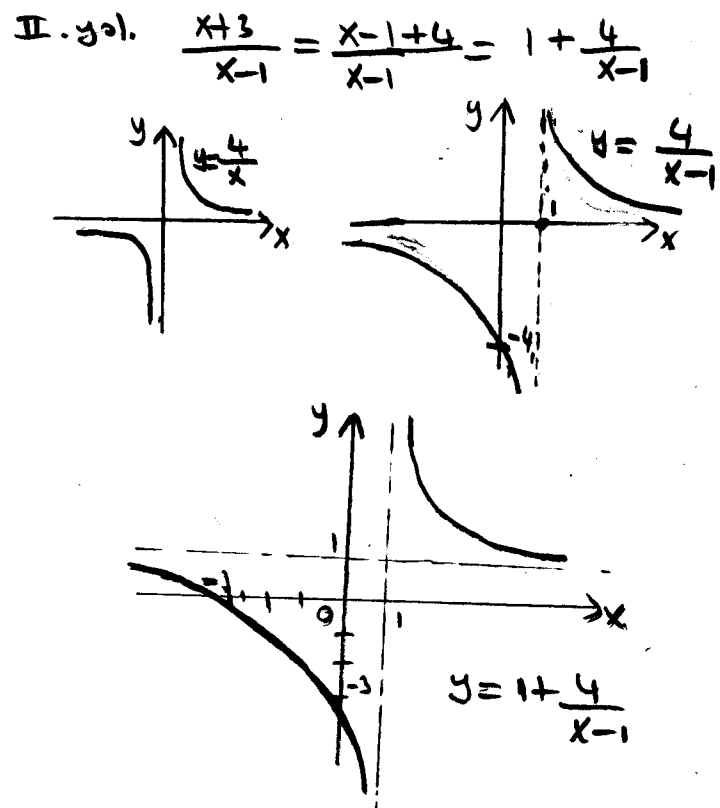
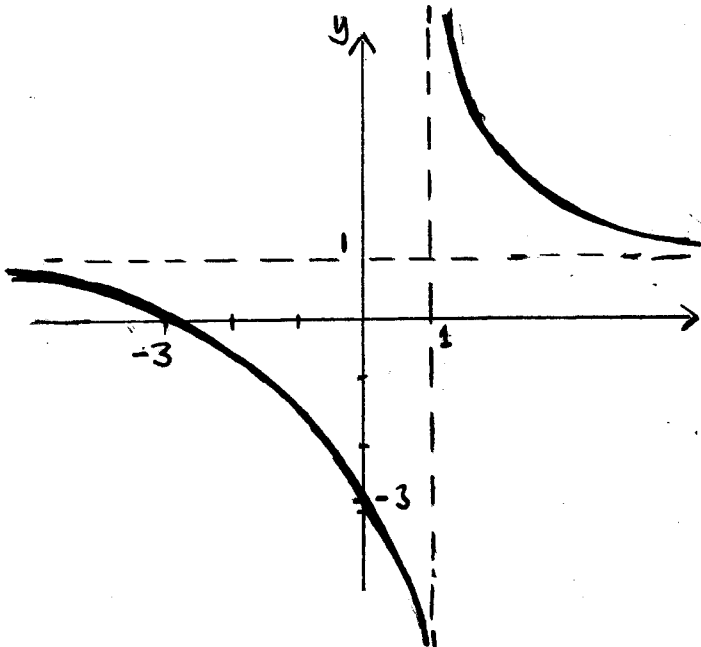
$f$  nin tanım kümesi olan  $(-\infty, 1) \cup (1, \infty)$  aralığında  $f$  azalandır.

c) (5P)  $f$  nin büküklüğünü inceleyiniz.

$$f''(x) = \frac{4 \cdot 2(x-1)}{(x-1)^4} = \frac{8(x-1)}{(x-1)^4} = \frac{8}{(x-1)^3} \text{ olur.}$$

Buna göre  $f''(x) < 0$  olduğu  $(-\infty, 1)$  aralığında büküklük aşağı doğru,  $f''(x) > 0$  olduğu  $(1, \infty)$  aralığında büküklük yukarı doğru olur.

d) (5P)  $f$  nin grafiğini çiziniz.



5- a) (8P)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - \sin x}{\ln(1+x)} = ?$   $\left[\frac{0}{0}\right]$  belirsizliği var.

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - \sin x}{\ln(1+x)} & \stackrel{L'Hos}{=} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{\frac{1}{1+x}} = \lim_{x \rightarrow 0} (1 - \cos x) (1+x) \\ & = (1-1) (1+0) = \boxed{0} \end{aligned}$$

b) (12P) Aşağıda verilen ifadelerin doğru ya da yanlış olup olmadığını belirleyiniz.

i)  $f$  çift fonksiyon ise  $(a \neq 0) \int_{-a}^a f(x) dx = 0$  dir. (YANLIŞ)

ii)  $f''(a) = 0$  ise  $a$ ,  $f$  nin büküm noktasıdır. (YANLIŞ)

iii)  $\frac{d}{dx} \log_5(x^2 + 4) = \frac{2x}{x^2 + 4} \log_5 e$  dir. (DOĞRU)

iv)  $y = \ln|x|$  in tanım kümesi  $(-\infty, \infty)$  aralığıdır. (YANLIŞ)

v)  $f$  türevlenebilir bir fonksiyon ve  $c$ ,  $f$  nin yerel maksimum noktası ise  $f'(c) = 0$  dir. (DOĞRU)

iv)  $\int_0^2 (x+1) dx$  integrali,  $[0, 2]$  aralığı üzerinde  $y = x+1$  doğrusunun altında kalan bölgenin alanını verir. (DOĞRU)