Öğrenci Bilgileri

Numarası

Adı Soyadı

Fakülte

Bölüm

Oturum Bilgileri

Yerleşke

Salon

Bina

Sıra No

Sorular

ZORUNLU ORTAK SERVİS DERLERİ
MATEMATİK-1/MAT101
2015-2016 GÜZ DÖNEMİ FİNAL SINAVI

1	2	3	4	5	GİRMEDİ	TOPLAM

ADI SOYADI :

NUMARA :

BÖLÜM :

İMZA :

Sınav süresi 90 dakikadır.

BAŞARILAR...

1- a) (10P) $(-\infty,\infty)$ **üzerinde tanımlı** $F(x)=\int_0^{x^2}\frac{\sqrt{t}}{1+2\sqrt{t}+t}\,dt$ **fonksiyonunun artan ve azalan olduğu aralıkları belirleyiniz. Varsa yerel maksimum ya da yerel minimum noktalarını bulunuz.**

$$\frac{dF}{dx}=\frac{\sqrt{x^2}}{1+2\sqrt{x^2}+x^2}\cdot 2x=\frac{2.|x|.x}{1+2|x|+x^2}\overset{x^2=|x|^2}{=}\frac{2.|x|.x}{(1+|x|)^2} \quad \text{olup.}$$

$\frac{dF}{dx}=0 \Leftrightarrow x=0$ dır. $X=0$ F'nin kritik noktasıdır.

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$F(x)$		$-$ ↘	y.min.	$+$ ↗	

F, $(-\infty,0)$ da <u>azalan</u> $(0,\infty)$ da <u>artandır</u>.

$x=0$, F 'nin yerel minimum noktasıdır.

F'nin yerel maksimum noktası yoktur.

b) (10P) $y=\ln\sqrt{x+1}$ ise $\frac{d^2y}{dx^2}=?$

$$\frac{dy}{dx}=\frac{1}{\sqrt{x+1}}\frac{d}{dx}\sqrt{x+1}=\frac{1}{\sqrt{x+1}}\cdot\frac{1}{2\sqrt{x+1}}=\frac{1}{2(x+1)}$$

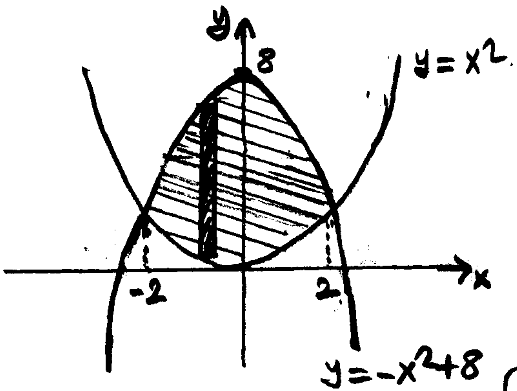
$$\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{d}{dx}\left(\frac{1}{2(x+1)}\right)=\frac{d}{dx}\left(\frac{1}{2}\cdot(x+1)^{-1}\right)=-\frac{1}{2}(x+1)^{-2}$$

$$=\boxed{-\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{(x+1)^2}}$$

2- D; $y = x^2$ ile $y = -x^2 + 8$ **eğrileri arasında kalan bölge olduğuna göre,**

a) (10P) D **bölgesinin alanını bulunuz.**

$$x^2 = -x^2 + 8 \Rightarrow 2x^2 = 8 \Rightarrow x^2 = 4 \Rightarrow x_{1,2} = \mp 2$$



Her iki eğri $x=-2$ ve $x=2$ de kesişirler.

$$A = \int_{-2}^{2} [(-x^2+8) - x^2]\,dx = \int_{-2}^{2} (-2x^2+8)\,dx$$

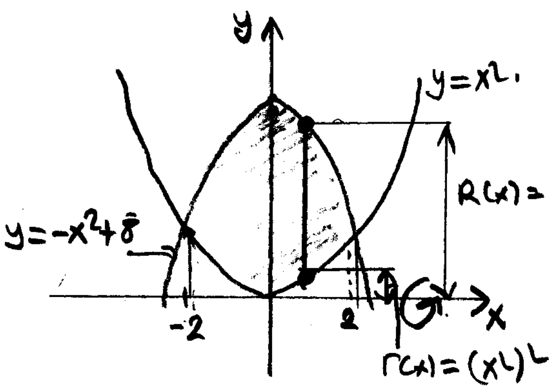
$$= 2\int_0^2 (-2x^2+8)\,dx$$

(Alan simetrik)

$$= 2\left(-2\frac{x^3}{3} + 8x\right]_0^2$$

$$= 2\left(-\frac{2}{3}8 + 16 - 0\right) = 2\left(\frac{-16+48}{3}\right) = \boxed{\frac{64}{3}\ \text{br}^2}$$

b) (10P) D **bölgesinin** $x-$ **ekseni etrafında döndürülmesi ile oluşturulan dönel cismin hacmini bulunuz.**



$$A(x) = \pi[R(x)]^2 - \pi[r(x)]^2$$

$$= \pi[(-x^2+8)^2 - x^4]$$

$$= \pi[x^4 - 16x^2 + 64 - x^4]$$

$$= \pi[64 - 16x^2]$$

$$V = \int_{-2}^{2} A(x)\,dx = \int_{-2}^{2} \pi(64 - 16x^2)\,dx$$

$$= 2\pi\int_0^2 (64 - 16x^2)\,dx = 2\pi\left(64x - \frac{16x^3}{3}\right]_0^2$$

(simetrik old.)

$$= 2\pi\left(128 - \frac{128}{3}\right) = 2\pi\left(\frac{384-128}{3}\right)$$

$$= 2\pi \cdot \frac{256}{3}$$

$$= \boxed{\frac{512}{3}\pi}\ \text{br}^3.$$

3- (a) (10P) $\lim_{x\to 0} \cot x . \ln(1+x) = ?$ $(0.\infty)$ belirsizliği var.

$$= \lim_{x\to 0} \frac{\cos x}{\sin x} \ln(1+x) = \lim_{x\to 0} \frac{\cos x . \ln(1+x)}{\sin x}$$ $\left[\frac{0}{0}\right]$ bel. var.

$$\overset{L'Hop}{=} \lim_{x\to 0} \frac{\sin x . \ln(1+x) + \cos x . \frac{1}{1+x}}{\cos x}$$

$$= \frac{0.0 + 1 . \frac{1}{1}}{1} = \boxed{1}$$ bulunur.

b) (10P) $\lim_{x\to\infty} (\ln x)^{1/x} = ?$ $[\infty^0]$ belirsizliği var.

$f(x) = (\ln x)^{1/x}$ diyelim. $\Rightarrow$ $\ln f(x) = \frac{1}{x} \ln(\ln x)$ olur.

$$\lim_{x\to\infty} \ln f(x) = \lim_{x\to\infty} \frac{\ln(\ln x)}{x}$$ (∞/∞) belirsizliği var.

$$\overset{L'Hop}{=} \lim_{x\to\infty} \frac{\frac{1}{\ln x} . \frac{1}{x}}{1} = \lim_{x\to\infty} \frac{1}{x \ln x} = 0$$ olur.

Buna göre;

$$\lim_{x\to\infty} (\ln x)^{1/x} = \lim_{x\to\infty} f(x) = \lim_{x\to\infty} e^{\ln f(x)} = e^0 = \boxed{1}$$

bulunur.

4- a) (10P) $\int (x+1)\cosh x\,dx = ?$ $= (x+1)\sinh x - \int \sinh x\,dx$

$$\begin{pmatrix} u = x+1 \Rightarrow du = dx \\ dv = \cosh x\,dx \Rightarrow v = \sinh x \end{pmatrix}$$

$$= (x+1)\sinh x - \cosh x + c.$$

b) (10P) $\int_1^e \frac{\ln(\ln x)}{x\ln x}dx$ integralinin yakınsak ya da ıraksak olup olmadığını araştırınız.

Eğer yakınsak ise değerini bulunuz.

Önce belirsiz integralini bulalım.

$$u = \ln(\ln x) \Rightarrow du = \frac{1}{x\ln x}dx.$$

$$\int \frac{\ln(\ln x)}{x\ln x}dx = \int u\,du = \frac{u^2}{2} + c = \frac{\ln(\ln x)}{2} + c.$$

Buna göre;

$$\int_1^e \frac{\ln(\ln x)}{x\ln x}dx = \lim_{a\to 1^+} \int_a^e \frac{\ln(\ln x)}{x\ln x}dx.$$

$$= \lim_{a\to 1^+}\left(\frac{\ln(\ln x)}{2}\right]_a^e = \lim_{a\to 1^+}\left(\frac{\overbrace{\ln(\overbrace{\ln e}^{1})}^{0}}{2} - \frac{\ln(\ln a)}{2}\right)$$

$$= -\frac{1}{2}\lim_{a\to 1^+}\ln(\ln a) = \infty$$ olur.

$\therefore \int_1^e \frac{\ln(\ln x)}{x\ln x}dx$ Iraksaktır.

5-

(a) (6P) $\int 2^x . 3^{x/2}\, dx = ?$

$$= \int 2^x\, 3^{x/2}\, dx = \int 2^x (\sqrt{3})^x\, dx$$

$$= \int (2\sqrt{3})^x\, dx = (2.\sqrt{3})^x . \frac{1}{\ln(2.\sqrt{3})} + c.$$

(b) (7P) $\int \frac{dx}{x^2+4x+8} = ?$

$$= \int \frac{dx}{(x+2)^2+4} \qquad (a=2 \quad u=x+2)$$

$$= \frac{1}{2} \tan^{-1}\left(\frac{x+2}{2}\right) + c.$$

(c) (7P)

$$\int_0^{\pi/2} \ln\left(\frac{e^x}{e^{\sin x}}\right)dx = ?$$

$$= \int_0^{\pi/2} (\ln e^x - \ln e^{\sin x})\, dx$$

$$= \int_0^{\pi/2} (x - \sin x)\, dx$$

$$= \left(\frac{x^2}{2} - (-\cos x)\right]_0^{\pi/2}$$

$$= \left(\frac{x^2}{2} + \cos x\right]_0^{\pi/2}$$

$$= \frac{\pi^2}{8} + \cancel{\cos\frac{\pi}{2}}^{\,0} - 0 - \cos 0$$

$$= \boxed{\frac{\pi^2}{8} - 1}$$