Öğrenci Bilgileri

Numarası

Adı Soyadı

Fakülte

Bölüm

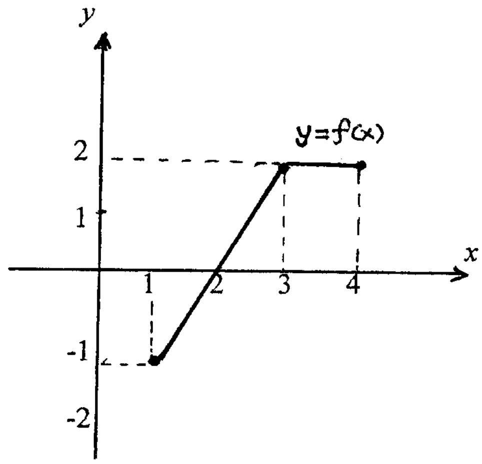
Oturum Bilgileri

Yerleşke **Salon**

Bina **Sıra No**

Sorular

1- $y = f(x)$ fonksiyonunun grafiği aşağıdaki gibidir.



a) (8P) $\int_1^4 f(x)dx$ integralinin değerini bulunuz.

Belirli integral ile eğri altında kalan kısmın arasındaki ilişkiyi kullanarak;

$$\int_1^4 f(x)\,dx = \int_1^2 f(x)\,dx + \int_2^3 f(x)\,dx + \int_3^4 f(x)\,dx$$

$$= \left[-\tfrac{1}{2}\cdot(2-1)\cdot 1\right] + \left[\tfrac{1}{2}\cdot(3-2)\cdot 2\right] + \left[(4-3)\cdot 2\right] = -\tfrac{1}{2} + \tfrac{2}{2} + 2 = \boxed{\tfrac{5}{2}}$$

b) (8P) $\int_1^4 |f(x)|dx$ integralinin değerini bulunuz.

Benzer biçimde; $\int_1^4 |f(x)|dx = \int_1^2 -f(x)\,dx + \int_2^3 f(x)\,dx + \int_3^4 f(x)\,dx$

$$= \left[\tfrac{1}{2}\cdot 1\cdot 1\right] + \left[\tfrac{1}{2}\cdot 1\cdot 2\right] + \left[1\cdot 2\right] = \boxed{\tfrac{7}{2}}$$

c) (8P) $[1, 4]$ aralığı üzerindeki f nin ortalama değerini hesaplayınız.

$\frac{1}{4-1}\int_1^4 f(x)\,dx = \frac{1}{3}\cdot\frac{5}{2} = \boxed{\frac{5}{6}}$ olur.

2- a) (18P) $f(x)=\begin{cases}3x^2-x+1 : x\le 0\\ \cos x - x \quad : x>0\end{cases}$ fonksiyonu $x=0$ noktasında türevlenebilir mi? Neden? Eğer türevlenebilirse $f'(0)$ değerini bulunuz.
f fonksiyonu $x=0$ noktasında sürekli olur mu? Neden?

$$f'_+(0)=\lim_{h\to 0^+}\frac{f(0+h)-f(0)}{h}=\lim_{h\to 0^+}\frac{f(h)-f(0)}{h}=\lim_{h\to 0^+}\frac{\cos h-h-1}{h}$$ ($[\frac{0}{0}]$ bel. var)

$$\overset{\text{L'Hosp.}}{=}\lim_{h\to 0^+}\frac{-\sin h-1}{1}=-1$$

$$f'_-(0)=\lim_{h\to 0^-}\frac{f(h)-f(0)}{h}=\lim_{h\to 0^-}\frac{3h^2-h+\cancel{1}-\cancel{1}}{h}=\lim_{h\to 0^-}\frac{\cancel{h}(3h-1)}{\cancel{h}}=-1$$

$f'_-(0)=f'_+(0)=-1$ olduğundan $f'(0)$ var ve $f'(0)=\boxed{-1}$ dir.

f $x=0$ noktasında türevlenebildiğinden bu noktada süreklidir.

b) (8P) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x - x}{\cos x - 1}=?$ $[\frac{0}{0}]$ belirsizliği var.

$$\overset{\text{L'Hosp.}}{=}\lim_{x\to 0}\frac{\cos x-1}{-\sin x}\overset{\text{L'Hosp}}{=}\lim_{x\to 0}\frac{-\sin x}{-\cos x}=\frac{0}{-1}=\boxed{0}$$

($[\frac{0}{0}]$ bel. var)

3- (8P) a) $\displaystyle\int_e^{\infty}\frac{dx}{x(\ln x)^2}$ has olmayan integrali yakınsak mı? Eğer yakınsak ise değerini bulunuz.

$$\int_e^{\infty}\frac{dx}{x(\ln x)^2}=\lim_{r\to\infty}\int_e^{r}\frac{dx}{x(\ln x)^2}=\lim_{r\to\infty}\int_1^{\ln r}\frac{du}{u^2}$$

$\left(\begin{array}{l} u=\ln x \Rightarrow du=\frac{1}{x}dx \\ x=e \Rightarrow u=1 \\ x=r \Rightarrow u=\ln r\end{array}\right)$

$$=\lim_{r\to\infty}\left(-\frac{1}{u}\right)\Big|_1^{\ln r}=\lim_{r\to\infty}\left(-\frac{1}{\ln r}+1\right)=1$$

old. integral yakınsaktır ve değeri 1 dir.

b) (8P) $\displaystyle\int\frac{3x^2+2x+1}{x(x-1)^2}dx=?$ Basit kesirlere ayırarak;

$$\frac{3x^2+2x+1}{x(x-1)^2}=\frac{A}{x}+\frac{B}{x-1}+\frac{C}{(x-1)^2}=\frac{A(x-1)^2+B.x(x-1)+Cx}{x.(x-1)^2}=\frac{(A+B)x^2+(-2A-B+C)x+A}{x.(x-1)^2}$$

$\left.\begin{array}{l}A+B=3\\ -2A-B+C=2\\ A=1\end{array}\right\}\Rightarrow \begin{array}{l}A=1\\ B=2\\ C=6\end{array}$

$$\int\frac{3x^2+2x+1}{x(x-1)^2}dx=\int\frac{dx}{x}+\int\frac{2}{x-1}dx+\int\frac{6}{(x-1)^2}dx$$

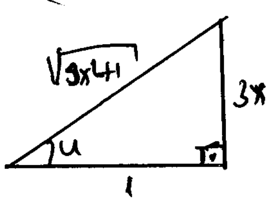
$$=\ln|x|+2\ln|x-1|-6\frac{1}{x-1}+c$$

c) (8P) $\displaystyle\int\frac{1}{\sqrt{9x^2+1}}dx=?$

$\left(\begin{array}{l}3x=\tan u \Rightarrow 3dx=\sec^2u\,du\\ \Rightarrow dx=\dfrac{\sec^2u\,du}{3}\end{array}\right)$

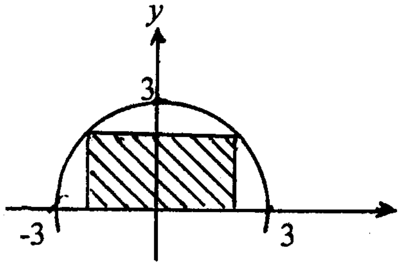
$$=\frac{1}{3}\int\frac{\sec^2u\,du}{\underbrace{\sqrt{\tan^2u+1}}_{\sec u}}=\frac{1}{3}\int\frac{\sec^{\cancel{2}}u}{\cancel{\sec u}}du$$

$$=\frac{1}{3}\int\sec u\,du=\frac{1}{3}\ln|\sec u+\tan u|+c$$

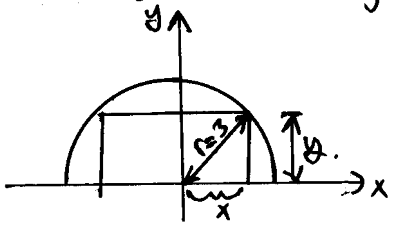


$$=\frac{1}{3}\ln\left|\sqrt{9x^2+1}+3x\right|+c.$$

4- a) (10P) $r=3$ birim yarı çaplı bir çemberin üst kısmına şekildeki gibi bir dikdörtgen yerleştiriliyor. Dikdörtgenin maksimum alanlı olması için boyutları ne olmalı dır? Bulunuz.



$x^2+y^2=3^2$ olduğundan $y=\sqrt{9-x^2}$ dir.



Buna göre $A(x)=2.x.y=2x\sqrt{9-x^2}$ olur.

$A(x)$ in tanım kümesi $0\le x$ ve $9\ge x^2 \Leftrightarrow -3\le x\le 3$ olup

$x\in(0,3)$ için. $\Rightarrow D_{A(x)}=[0,3]$ olur.

$A'(x)=2\sqrt{9-x^2}+2x.\frac{-\cancel{2}x}{\cancel{2}\sqrt{9-x^2}}=\frac{2(9-x^2)-2x^2}{\sqrt{9-x^2}}=\frac{18-4x^2}{\sqrt{9-x^2}}=0$

$\Leftrightarrow 18-4x^2=0 \Leftrightarrow x^2=\frac{18}{4}=\frac{9}{2} \Leftrightarrow x=\mp\frac{3}{\sqrt2}$ bulunur. $-\frac{3}{\sqrt2}\notin[0,3]$

Buna göre. $A(\frac{3}{\sqrt2})=2.\frac{3}{\sqrt2}\sqrt{9-\frac{9}{2}}=2.\frac{3}{\sqrt2}\frac{3}{\sqrt2}=9$ $A(0)=0$ ve $A(3)=0$.

olup $x=\frac{3}{\sqrt2}$ de A en büyük değeri alır. Boyutlar $2.\frac{3}{\sqrt2}$ ve $\frac{3}{\sqrt2}$ olur. $\Rightarrow \boxed{3\sqrt2 \text{ ve } \frac{3}{\sqrt2}}$

b) (8P) $f(x)=\int_1^{x^2-1}\sqrt{t+1}\,(t^2-1)dt$ fonksiyonunun kritik noktalarını bulunuz.

$f'(x)=\sqrt{x^2-1+1}\,[(x^2-1)^2-1].2x=|x|\,[(x^4-2x^2+1)-1]\,2x$

$=2x|x|(x^4-2x^2)$

$f'(x)=0 \Leftrightarrow 2x|x|(x^4-2x^2)=0 \Leftrightarrow 2x|x|=0$ veya $x^2(x^2-2)=0$.

$\Leftrightarrow x=0$ veya $x=\mp\sqrt2$. olur.

c) (8P) $f(x)=\ln(2-|x+3|)$ fonksiyonunun D_f tanım kümesini bulunuz..

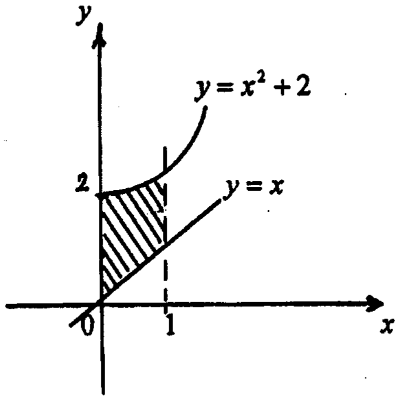
$2-|x+3|>0$ olmalı.

$\Leftrightarrow |x+3|<2 \Leftrightarrow -2<x+3<2$

$\Leftrightarrow -5<x<-1$

$\boxed{D_f=(-5,-1)}$ dir.

5- Aşağıda verilen şekle göre;

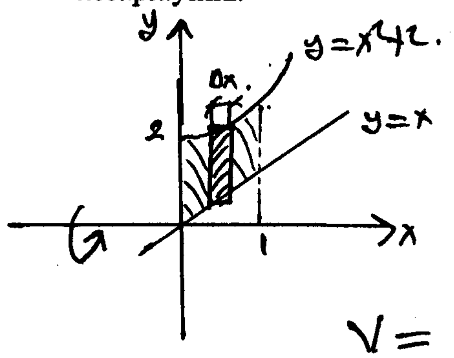


a) (10P) Taralı bölgenin alanını bulunuz.

$$A=\int_0^1 |(x^2+2)-x|\,dx=\int_0^1 (x^2-x+2)\,dx$$

$$=\left(\frac{x^3}{3}-\frac{x^2}{2}+2x\right)\Big|_0^1=\frac{1}{3}-\frac{1}{2}+2=\boxed{\frac{11}{6}}\ \text{br}^2.$$

b) (10P) Taralı bölgenin x – ekseni etrafında döndürülmesi ile oluşturulan cismin hacmini hesaplayınız.



$$\Delta V_x=\pi\,(x^2+2)^2\Delta x-\pi\,(x)^2\Delta x.$$

$$=\pi\,[x^4+4x^2+4-x^2]\,\Delta x$$

$$=\pi\,[x^4+3x^2+4]\,\Delta x.$$

Buna göre;

$$V=\pi\int_0^1 (x^4+3x^2+4)\,dx$$

$$=\pi\left(\frac{x^5}{5}+x^3+4x\right)\Big|_0^1=\pi\left(\frac{1}{5}+1+4\right)$$

$$=\boxed{\frac{26\pi}{5}}\ \text{br}^3.$$