

a) $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x+y}{x^2+3y^2}$ limitinin var olup olmadığını araştırınız. Varsa limitini bulunuz.

b) $f(x,y) = \cos(xy) + \ln(x+y)$ için $f_{12}(x,y)$ kısmi türevini bulunuz.

SÜRE: 15dk. (20 puan)

Çözüm:

a) $x=0$ doğrusu boyunca $(0,0)$ 'a yaklaşalım.

$$f(x,y) = f(0,y) = \frac{y}{3y^2} = \frac{1}{3y} \text{ olup}$$

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} f(0,y) = \lim_{y \rightarrow 0} \frac{1}{3y} = \infty \text{ olduğundan limit yoktur.}$$

$$b) f_1(x,y) = -y \sin(xy) + \frac{1}{x+y}$$

$$f_{12}(x,y) = -\sin(xy) - xy \cos(xy) - \frac{1}{(x+y)^2}$$

$$= -(\sin(xy) + xy \cos(xy)) + \frac{1}{(x+y)^2}$$

a) $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{xy}{2x^2 + 3y^2}$ limitinin var olup olmadığını araştırınız. Varsa limitini bulunuz.

b) $f(x,y) = \tan^{-1}(xy) + \sqrt{x+y}$ için $f_{21}(x,y)$ kısmi türevini bulunuz.

SÜRE: 15dk. (20 puan)

Çözüm:

a) $x=0$ doğru boyunca $(0,0)$ 'a yaklaşalım. 0 zaman

$$f(x,y) = f(0,y) = \frac{0}{3y^2} = 0 \text{ dur.}$$

Eğer limit olsaydı $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{xy}{2x^2 + 3y^2} = 0$ olurdu.

Fakat $y=x$ doğrusu boyunca $(0,0)$ 'a yaklaşıldığında

$$f(x,y) = f(x,x) = \frac{x^2}{2x^2 + 3x^2} = \frac{x^2}{5x^2} = \frac{1}{5} \text{ olduğundan}$$

limit yoktur.

$$b) f_2(x,y) = \frac{1}{1+(xy)^2} \cdot x + 1 = \frac{x}{1+x^2y^2} + 1$$

$$f_{21}(x,y) = \frac{1+x^2y^2 - x(2xy^2)}{(1+x^2y^2)^2} = \frac{1-x^2y^2}{(1+x^2y^2)^2}$$

a) $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{1}{e^{x^2+y^2}}$ limitinin var olup olmadığını araştırınız. Varsa limitini bulunuz.

b) $z = e^{xy} + \sin(x + \sqrt{y})$ için $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}$ kısmi türevini bulunuz.

SÜRE: 15dk. (20 puan)

Çözüm!

a) $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{1}{e^{x^2+y^2}} = \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{1}{e^{\underbrace{x^2+y^2}_{\rightarrow 0}}} = 0.$

b) $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial z}{\partial x} \right)$

$$= \frac{\partial}{\partial x} \left(y e^{xy} + \cos(x + \sqrt{y}) \right)$$

$$= y^2 e^{xy} - \sin(x + \sqrt{y})$$

a) $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x^4 - y^4}{x^2 + y^2}$ limitinin var olup olmadığını araştırınız. Varsa limitini bulunuz.

b) $z = \sin^{-1}(xy) + \sqrt{1+x} + y$ için $\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}$ kısmi türevini bulunuz.

SÜRE: 15dk. (20 puan)

Çözüm:

$$\begin{aligned} \text{d) } \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x^4 - y^4}{x^2 + y^2} &= \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{(x^2 - y^2)(x^2 + y^2)}{x^2 + y^2} \\ &= \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} (x^2 - y^2) = 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{b) } \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} &= \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial z}{\partial y} \right) = \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{x}{\sqrt{1+x^2y^2}} + 1 \right) \\ &= \frac{-x \cdot \frac{1}{2\sqrt{1+x^2y^2}} \cdot 2x^2y}{1+x^2y^2} \\ &= -\frac{x^3y}{(1+x^2y^2)^{3/2}} \end{aligned}$$