Öğrenci Bilgileri

Numarası

Adı Soyadı

Fakülte

Bölüm

Oturum Bilgileri

Yerleşke **Salon**

Bina **Sıra No**

Sorular

SÜRE: 90 dk.

MAT-102 MATEMATİK -II DERSİ I. ARA SINAVI

BAŞARILAR

1	2	3	4	5	Toplam	GİRMEDİ

İmza:

1-

a) (8P) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{n\sin n}{n^2+1} = ?$ Her $n\in\mathbb{N}$ için. $-1 \le \sin n \le 1$ olduğundan

her $n\in\mathbb{N}$ için;

$$-\frac{n}{n^2+1} \le \frac{n\sin n}{n^2+1} \le \frac{n}{n^2+1} \quad \text{dir}$$

$$\lim_{n\to\infty}\left(-\frac{n}{n^2+1}\right) = \lim_{n\to\infty}\frac{n}{n^2+1} = 0 \quad \text{olduğundan}$$

sıkıştırma teoreminden $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n\sin n}{n^2+1} = \boxed{0}$

bulunur.

b) (8P) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{n^2-2}{3+2n^2}$ **serisinin yakınsak olup olmadığını araştırınız.**

$$\lim_{n\to\infty}\frac{n^2-2}{3+2n^2} = \frac{1}{2} \neq 0 \quad \text{olduğundan}$$

seri yakınsak değildir.

$\left(\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n \text{ yakınsak ise } \lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0\right)$

c) (8P) $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{5^{n+1}}{3.7^n}$ **serisi yakınsak ise değerini bulunuz.**

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{5^{n+1}}{3.7^n} = \sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{5}{3}\right)\cdot\left(\frac{5}{7}\right)^n$$ ($\left|\frac{5}{7}\right| < 1$ olduğundan Geometrik seri yakınsak).

$$= \frac{5}{3}\,\frac{1}{1-\frac{5}{7}}$$

$$= \frac{5}{3}\cdot\frac{1}{\frac{2}{7}} = \boxed{\frac{35}{6}}$$

2- a) (12P) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n (x-1)^n}{n!}$ **serisinin yakınsaklık merkezini, yakınsaklık yarıçapını ve yakınsaklık aralığını bulunuz.**

$x=1$ serinin yakınsaklık merkezidir.

$$\lim_{n\to\infty} \left| \frac{\frac{2^{n+1}(x-1)^{n+1}}{(n+1)!}}{\frac{2^n (x-1)^n}{n!}} \right| = \lim_{n\to\infty} \left| \frac{\cancel{2^n}.2.\cancel{(x-1)^n}.(x-1).\cancel{n!}}{(n+1)\cancel{n!}\,\cancel{2^n}\,\cancel{(x-1)^n}} \right|$$

$$= |x-1| \lim_{n\to\infty} \frac{2}{n+1} = 0 \text{ oldğundan.}$$

$\mathbb{R}$'deki tüm x sayıları için seri ü yakınsaktır ve. yakınsaklık yarıçapı $R=\infty$ olup. yakınsaklık aralığı $(-\infty, \infty)$ aralığıdır.

b) (12P) $\sum_{n=0}^{\infty} x^n$ **kuvvet serisinden yararlanarak** $\frac{1}{(1-x)^3}$ **fonksiyonunun kuvvet serisini bulunuz.**

$-1<x<1$ için $\frac{1}{1-x} = \sum_{n=0}^{\infty} x^n = 1+x+x^2+\dots$ olduğunu biliyoruz.

Bunun terim terim türevini alırsak

$-1<x<1$ için;

$$\frac{1}{(1-x)^2} = \sum_{n=1}^{\infty} n x^{n-1} = 1+2x+3x^2+4x^3+\dots \quad \text{bulunur.}$$

Tekrar terim terim türev alındığında

$-1<x<1$ için;

$$\frac{2}{(1-x)^3} = \sum_{n=2}^{\infty} n.(n-1)\,x^{n-2} = 2+6x+12x^2+\dots$$

elde edilir. Eşitliğin her iki yanını 2'ye bölersek.

$-1<x<1$ için

$$\boxed{\frac{1}{(1-x)^3} = \sum_{n=2}^{\infty} \frac{n(n-1)}{2} x^{n-2} = 1+3x+6x^2+\dots}$$

bulunur.

3- $\mathbf{u} = \mathbf{i} - \mathbf{j} + 2\mathbf{k}$, $\mathbf{v} = 2\mathbf{j} - \mathbf{k}$, $\mathbf{w} = -\mathbf{i} + \mathbf{j} + a\mathbf{k}$ **vektörleri veriliyor.**

a) (8P) v vektörüne ters yönde birim vektör bulunuz.

$v = 2j - k$ olduğuna göre v'ye ters yönde olan vektörde

$-v = -2j + k$ olur.

$$\frac{-2j+k}{|-2j+k|} = \frac{-2j+k}{\sqrt{4+1}} = \boxed{\frac{-2}{\sqrt{5}}j + \frac{1}{\sqrt{5}}k}$$ ola v'ye ters yönde bir birim vektör olur.

b) (8P) u ile v arasındaki açıyı bulunuz.

$u \cdot v = |u| . |v| . \cos\theta$ olup. (θ u ile v arasındaki açı).

$(i - j + 2k) \cdot (2j - k) = \sqrt{1+1+4} . \sqrt{4+1} . \cos\theta$

$\Rightarrow -2 - 2 = \sqrt{6} . \sqrt{5} . \cos\theta$

$\Rightarrow \boxed{\theta = \cos^{-1}\left(-\frac{4}{\sqrt{30}}\right)}$ olur.

c) (8P) u, v ve w vektörlerinin aynı düzlemde olmaları için a ne olmalıdır?

u, v ve w aynı düzlemde olmaları için

$$u \cdot (v \times w) = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & 2 & -1 \\ -1 & 1 & a \end{vmatrix} = 0$$ olmalıdır.

$\Leftrightarrow 2a - 1 + 0 + 4 + 1 + 0 = 0$

$\Leftrightarrow 2a + 4 = 0 \Leftrightarrow 2a = -4$

$\Leftrightarrow \boxed{a = -2}$ olmalı.

4- a) (12P) $(0,1,-1)$ **noktasından geçen ve** $4x-2y+3z=5$ **düzlemine paralel düzlemin denklemini bulunuz.**

İstenen düzlem $4x-2y+3z=5$ düzlemine paralel olacağından, istenen düzlemin normal vektörü de $4\hat{i}-2\hat{j}+3\hat{k}$ vektörüne paralel olur.

Buna göre $(0,1,-1)$ den geçen ve $4x-2y+3z=5$ düzlemine paralel düzlemin denklemi;

$$4x+2(y-1)+3(z+1)=0. \quad \text{olup.}$$

$$\Rightarrow 4x-2y+3z+2+3=0 \Rightarrow \boxed{4x-2y+3z=-5} \quad \text{olur.}$$

b) (12P) $f(x,y)=x\sin(x+y^2)$ **ise**

$$\frac{\partial f}{\partial x}\left(\frac{\pi}{2},0\right)=?$$

$$\frac{\partial f(x,y)}{\partial x} = \sin(x+y^2)+x\cos(x+y^2) \quad \text{olup.}$$

$$\frac{\partial f}{\partial x}\left(\frac{\pi}{2},0\right) = \underbrace{\sin\left(\frac{\pi}{2}\right)}_{=1}+\frac{\pi}{2}\cdot\overbrace{\cos\left(\frac{\pi}{2}\right)}^{=0} = \boxed{1}$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}\left(\frac{\pi}{2},0\right)=?$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right) = \frac{\partial}{\partial x}\left(2xy\cos(x+y^2)\right)$$

$$= 2y\cos(x+y^2)-2xy\sin(x+y^2)$$

$$\Rightarrow \frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}\left(\frac{\pi}{2},0\right) = 2\cdot 0\cdot\cos\left(\frac{\pi}{2}\right)-2\cdot\frac{\pi}{2}\cdot 0\cdot\sin\frac{\pi}{2} = \boxed{0}$$

5- **a) (12P)** Aşağıda verilen ifadelerin **doğru** ya da **yanlış** olup olmadığını belirleyiniz.

(i) $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$ **ise** $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ **serisi yakınsaktır.** (YANLIŞ.)

(ii) $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ **yakınsak ise** $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ **de yakınsaktır** (DOĞRU.)

(iii) **u ile v vektörleri paralel ise** $\mathbf{u} \bullet \mathbf{v} = 0$ **dır.** (.YANLIŞ..)

(iv) $\mathbf{u} \times \mathbf{v}$ **vektörü hem u hem de v vektörüne diktir.** (DOĞRU..)

b) (12P) Aşağıdaki boşlukları doldurunuz.

(i) $\mathbf{u}=\mathbf{i}-2\mathbf{j}+3\mathbf{k}$, $\mathbf{v}=2\mathbf{i}-4\mathbf{j}+a\mathbf{k}$ **vektörlerinin paralel olması için** $a=$ ..6.. **olmalıdır.**

(ii) $\lim\limits_{(x,y,z)\to(0,1,1)} \dfrac{3z\cos(x^2ye^z)}{x^2+y^2+z^2}=$ ...$\frac{3}{2}$.... **dir.**

(iii) Kartezyen koordinatlardaki $(-1,1,-1/2)$ **noktası silindirik koordinatlarda (…,…,…) dir.**

$\left(\sqrt{2}, \frac{3\pi}{4}, -\frac{1}{2}\right)$

(iv) IR^3 **de** $y=x^2$ **denklemiyle verilen yüzey** parabolik silindir **dir.**

(uzantısı z-ekseni boyunca)