MAT-102 MATEMATİK -II DERSİ I. ARA SINAVI

Sınav Süresi : 90 dk. **BAŞARILAR**

1	2	3	4	5	Toplam

1- a) (8P) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\sqrt{n^2+2n}-\sqrt{n^2-n}\right)=?$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{\left(\sqrt{n^2+2n}-\sqrt{n^2-n}\right).\left(\sqrt{n^2+2n}+\sqrt{n^2-n}\right)}{\left(\sqrt{n^2+2n}+\sqrt{n^2-n}\right)} = \lim_{n\to\infty} \frac{\cancel{n^2}+2n-\cancel{n^2}+n}{\sqrt{n^2+2n}+\sqrt{n^2-n}}$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{3n}{\sqrt{n^2(1+\frac{2}{n})}+\sqrt{n^2(1-\frac{1}{n})}} = \lim_{n\to\infty} \frac{3\cancel{n}}{\cancel{n}\left(\sqrt{1+\frac{2}{n}}+\sqrt{1-\frac{1}{n}}\right)} = \frac{3}{\sqrt{1}+\sqrt{1}} = \boxed{\frac{3}{2}}$$

b) (6P) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n\sqrt{n}}$ **serisinin yakınsak olup olmadığını araştırınız.**

$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n\sqrt{n}} = \sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^{3/2}}$ olup

$p=\frac{3}{2}>1$ olduğundan p- seri testinden seri yakınsak olur.

c) (10P) $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{4+3^n}{4^{n+2}}$ **serisi yakınsak ise değerini bulunuz.**

$$= \sum_{n=0}^{\infty}\frac{4}{4^{n+2}} + \sum_{n=0}^{\infty}\frac{3^n}{4^{n+2}} = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{4}{4^{\cancel{2}}.4^n} + \sum_{n=0}^{\infty}\frac{3^n}{4^2.4^n}$$

$$= \frac{1}{4}\underbrace{\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{4^n}} + \frac{1}{16}\underbrace{\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{3}{4}\right)^n} = \frac{1}{4}\cdot\frac{1}{1-\frac{1}{4}} + \frac{1}{16}\cdot\frac{1}{1-\frac{3}{4}}$$

Geometrik serisi $\frac{1}{4}<1$ old. yak.

Geometrik serisi $\frac{3}{4}<1$ old. yakınsak

$$= \frac{1}{\cancel{4}}\cdot\frac{\cancel{4}}{3} + \frac{1}{16}\,\frac{4}{1}$$

$$= \frac{1}{3}+\frac{1}{4} = \boxed{\frac{7}{12}}$$

2- a) (12P) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n(n^2+1)2^n}$ **serisinin yakınsaklık merkezini, yakınsaklık yarıçapını ve yakınsaklık aralığını bulunuz.**

$x=0$ yakınsaklık merkezidir.

$$L=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{(n+1)[(n+1)^2+1]2^{\cancel{n}+1}}\cdot\frac{n(n^2+1)2^{\cancel{n}}}{1}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{n(n^2+1)}{2.(n+1)[(n+1)^2+1]}=\frac{1}{2}\text{ olup.}$$

Yakınsaklık yarıçapı $R=\frac{1}{L}=\frac{1}{\frac{1}{2}}=2$ dir.

Buna göre seri $-2<x<2$ aralığında yakınsak olur.

$x=-2$ için $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-2)^n}{n(n^2+1)2^n}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n.\cancel{2^n}}{n(n^2+1)\cancel{2^n}}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n(n^2+1)}$ olup.

$\displaystyle\left|\frac{(-1)^n}{n(n^2+1)}\right|=\frac{1}{n^3+n}\leq\frac{1}{n^3}\Rightarrow\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^3}\,(p=3>1)$ p-seri testinden yakınsak.

$\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n(n^2+1)}$ mutlak yak. $\Rightarrow$ yakınsaktır.

$x=2$ için $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cancel{2^n}}{n(n^2+1)\cancel{2^n}}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n(n^2+1)}$ olup $\displaystyle\frac{1}{n(n^2+1)}\leq\frac{1}{n^3}$ olup $(p=3>1)$ p seri testinden yakınsak olur.

$\therefore$ serinin yakınsaklık aralığı $YA=[-2,2]$ yani $-2\leq x\leq 2$ dir.

b) (14P) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}x^n$ **kuvvet serisinden yararlanarak** $\displaystyle\frac{x}{(1-x)^2}$ **nin kuvvet serisini bulunuz.**

Bundan yararlanarak $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{2^n}$ **serisinin değerini bulunuz.**

$|x|<1$ için $\displaystyle\frac{1}{1-x}=\sum_{n=0}^{\infty}x^n=1+x+x^2+x^3+\dots$ olduğunu biliyoruz.

$|x|<1$ için terim terim türev alındığında

$$\frac{1}{(1-x)^2}=1+2x+3x^2+4x^3+\dots=\sum_{n=1}^{\infty}n\,x^{n-1}\text{ bulunur.}$$

Eşitliğin her iki yanı x ile çarpılırsa $|x|<1$ için

$$\frac{x}{(1-x)^2}=x+2x^2+3x^3+4x^4+\dots=\sum_{n=1}^{\infty}n\,x^n\text{ olur.}\quad\dots(*)$$

$(*)$ dan $x=\frac{1}{2}$ alınırsa

$$\sum_{n=1}^{\infty}n\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^n=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{2^n}=\frac{\frac{1}{2}}{\left(1-\frac{1}{2}\right)^2}=\frac{\cancel{\frac{1}{2}}}{\left(\frac{1}{2}\right)^{\cancel{2}}}=\boxed{2}$$

bulunur.

3- $A=(-1,1,0)$, $B=(1,0,2)$, $C=(0,1,-1)$ **noktaları veriliyor.**

(6P) a) $\vec{AB}$ **ve** $\vec{AC}$ **vektörlerini bulunuz.**

$\vec{AB} = (1-(-1))\hat{i} + (0-1)\hat{j} + (2-0)k = 2\hat{i} - \hat{j} + 2k$.

$\vec{AC} = (0-(-1))\hat{i} + (1-1)\hat{j} + (-1-0)k = \hat{i} - k$

(8P) b) $\vec{AB}$ **ve** $\vec{AC}$ **vektörlerine dik bir birim vektör bulunuz.**

$\vec{AB}$ ve $\vec{AC}$ ye dik olan vektör $\vec{AB} \times \vec{AC}$ vektörüdür. Buna göre

$\left(|\vec{AB} \times \vec{AC}| = \sqrt{1+4\cdot4+1} = \sqrt{18}\right)$

$$\vec{AB} \times \vec{AC} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 2 & -1 & 2 \\ 1 & 0 & -1 \end{vmatrix} = \hat{i}+2\hat{j}+k+2\hat{j} = \hat{i}+4\hat{j}+k \text{ olur.}$$

İstenen birim vektör, $\frac{1}{\sqrt{18}}\hat{i} + \frac{4}{\sqrt{18}}\hat{j} + \frac{1}{\sqrt{18}}k$

(8P) c) Orijinden geçen ve normali $\vec{AB}$ **vektörü olan düzlemin denklemini yazınız.**

Genel düzlem denklemi $n = A\hat{i}+B\hat{j}+Ck$ düzlemin normali olmak üzere $A(x-x_0)+B(y-y_0)+C(z-z_0)=0$ biçimindedir.

$P_0=(0,0,0)$ ve $A=2$, $B=-1$ ve $C=2$ olduğundan

İstenen düzlem denklemi;

$2x - y + 2z = 0$ olur.

4- $f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^2\sqrt{1-xy}}{x^2+y^2} & :(x,y)\neq(0,0) \\ 0 & :(x,y)=(0,0) \end{cases}$ **fonksiyonu veriliyor.**

(6P) a) $y-$**ekseni boyunca ve** $y=x$ **doğrusu boyunca** f **nin** $(x,y)\to(0,0)$ **limitlerini bulunuz.**

y-ekseni boyunca ($x=0$ doğ.) $f(x,y) = f(0,y) = \dfrac{0^2\sqrt{1-0}}{0+y^2} = 0$

yani; $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(0,y) = \lim\limits_{y\to0} f(0,y) = 0$ dır.

$y=x$ doğrusu boyunca $f(x,y) = f(x,x) = \dfrac{x^2\sqrt{1-x^2}}{2x^2} = \dfrac{\sqrt{1-x^2}}{2}$ dur

$\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,x) = \lim\limits_{x\to0} \dfrac{\sqrt{1-x^2}}{2} = \boxed{\frac{1}{2}}$ olur.

(6P)b) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$ **limiti var mı? Neden?**

Eğer limit var olsaydı (0,0) 'a hangi yolla yaklaşırsak yaklaşalım limit aynı olurdu. (a) şıkkında y-ekseni boyunca ve $y=x$ doğrusu boyunca farklı limitler elde edildiğinden (0,0) 'da f nin limiti yoktur.

(6P)c) f, **(0,0) noktasında sürekli mi? Neden?**

(b) şıkkından $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$ limiti var olmadığından fonksiyon (0,0) da sürekli olamaz.

(6P)d) f, **(0,0) noktasında türevlenebilir mi? Neden?**

Eğer f (0,0) da türevlenebilseydi sürekli olurdu. Halbuki f, (0,0) da sürekli olmadığından bu noktada türevlenemez de.

5-

(10P) a) f **kısmi türevleri var ve sürekli bir fonksiyon olmak üzere**

$\frac{\partial}{\partial x} f\left(\ln xy, \sqrt{x^3 y}\right)$ **yi** f **nin kısmi türevleri cinsinden yazınız.**

$$\frac{\partial}{\partial x} f\left(\ln xy, \sqrt{x^3y}\right) = f_1\left(\ln xy, \sqrt{x^3y}\right) \cdot \frac{y}{xy} + f_2\left(\ln xy, \sqrt{x^3y}\right) \frac{3x^2y}{2\sqrt{x^3y}}$$

$$= \frac{1}{x} f_1\left(\ln xy, \sqrt{x^3y}\right) + \frac{3}{2} \frac{x^2y}{\sqrt{x^3y}} f_2\left(\ln xy, \sqrt{x^3y}\right) \text{ olur.}$$

(14P) b) IR^3 **den** IR^2 **ye tanımlı** $f(x,y,z) = \left(\sin(x+y+z),\, e^{xz}\right)$ **fonksiyonu için** $Df(0,0,\pi)$ **Jacobian matrisini bulunuz.**

$$D_f(0,0,\pi) = \left.\begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x}\sin(x+y+z) & \frac{\partial}{\partial y}\sin(x+y+z) & \frac{\partial}{\partial z}\sin(x+y+z) \\ \frac{\partial}{\partial x} e^{xz} & \frac{\partial}{\partial y} e^{xz} & \frac{\partial}{\partial z} e^{xz} \end{pmatrix}\right|_{(0,0,\pi)}$$

$$= \left.\begin{pmatrix} \cos(x+y+z) & \cos(x+y+z) & \cos(x+y+z) \\ z e^{xz} & 0 & x e^{xz} \end{pmatrix}\right|_{(0,0,\pi)}$$

$$= \begin{pmatrix} \cos(0+0,\pi) & \cos(0+0+\pi) & \cos(0+0+\pi) \\ \pi . e^0 & 0 & 0 . e^0 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} -1 & -1 & -1 \\ \pi & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

bulunur.