ZORUNLU ORTAK SERVİS DERSLERİ
MAT-102/ MATEMATİK -II DERSİ
2016-2017 BAHAR DÖNEMİ FİNAL SINAVI

ADI ve SOYADI :

NUMARASI :

BÖLÜMÜ :

İMZA :

18.05.2017

1	2	3	4	5	TOPLAM

Sınav Süresi 90 Dakikadır.

BAŞARILAR

1- a) (10P) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{(n+1)!}$ **serisi yakınsak mıdır? Neden?**

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\frac{2^{n+1}}{(n+2)!}}{\frac{2^n}{(n+1)!}} = \lim_{n\to\infty} \frac{2.\cancel{2^n}.\cancel{(n+1)!}}{\cancel{2^n}.(n+2)\cancel{(n+1)!}}$$

$$= 2\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n+2} = 0 < 1$$

olduğundan ORAN TESTİNDEN.

$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{(n+1)!}$ serisi yakınsaktır.

b) (10P) $\lim_{(x,y)\to(1,1)} \frac{x-y}{\sqrt{x}-\sqrt{y}} = ?$ $\left[\frac{0}{0}\right]$ belirsizliği var.

$$\lim_{(x,y)\to(1,1)} \frac{x-y}{\sqrt{x}-\sqrt{y}} = \lim_{(x,y)\to(1,1)} \frac{(x-y)(\sqrt{x}+\sqrt{y})}{(\sqrt{x}-\sqrt{y})(\sqrt{x}+\sqrt{y})}$$

$$= \lim_{(x,y)\to(1,1)} \frac{\cancel{(x-y)}(\sqrt{x}+\sqrt{y})}{\cancel{x-y}}$$

$$= \lim_{(x,y)\to(1,1)} (\sqrt{x}+\sqrt{y}) = 1+1 = \boxed{2}$$

2- a) (10P) $z = x^2 + xy - y^2$, $x = s^2 - t^2$, $y = \sin t$ **olduğuna göre**

$\frac{\partial z}{\partial s} = ?$ $\frac{\partial z}{\partial x} \cdot \frac{\partial x}{\partial s} + \frac{\partial z}{\partial y} \cdot \frac{\partial y}{\partial s}$

$= (2x+y).(2s) + (x-2y)(0)$

$= (2(s^2-t^2)+\sin t)\, 2.s$

$= 2s\,(2(s^2-t^2)+\sin t)$

$\frac{\partial z}{\partial t} = ?$ $\frac{\partial z}{\partial x} \cdot \frac{\partial x}{\partial t} + \frac{\partial z}{\partial y} \cdot \frac{\partial y}{\partial t}$

$= (2x+y)\,(-2t) + (x-2y)\,\cos t$

$= -2t\,(2(s^2-t^2)+\sin t) + (s^2-t^2-2\sin t).\cos t$

II. yol: $z = (s^2-t^2)^2 + (s^2-t^2)\sin t - \sin^2 t$.

$\Rightarrow \frac{\partial z}{\partial s} = 2(s^2-t^2).2s + 2s\sin t$

$= 2s[(s^2-t^2)+\sin t]$

$\frac{\partial z}{\partial t} = 2(s^2-t^2).(-2t) - 2t\sin t$

$+ (s^2-t^2)\cos t - 2\sin t.\cos t$

$= -2t\,(2(s^2-t^2)\sin t) + (s^2-t^2-2\sin t)\cos t$

b) (10P) $f(x,y) = (x+1)^2 - 2y^2$ **fonksiyonunun kritik noktalarını bulunuz. Bu noktaların yerel maksimum veya yerel minimum veya eyer noktası olup olmadığını araştırınız.**

$$\left.\begin{aligned} f_x(x,y) &= 2(x+1) = 0 \Rightarrow x = -1 \\ f_y(x,y) &= -4y = 0 \Rightarrow y = 0 \end{aligned}\right\} \Rightarrow (-1,0) \text{ f'nin kritik noktasıdır.}$$

$f_{xx} = 2$, $f_{yy} = -4$, $f_{xy} = f_{yx} = 0$ olup

$\Delta(-1,0) = f_{xx}(-1,0).f_{yy}(-1,0) - [f_{xy}(-1,0)]^2$

$= 2.(-4) - 0 = -8 < 0$ olduğundan

$(-1,0)$ f'nin $\boxed{\text{eyer noktası}}$ olur.

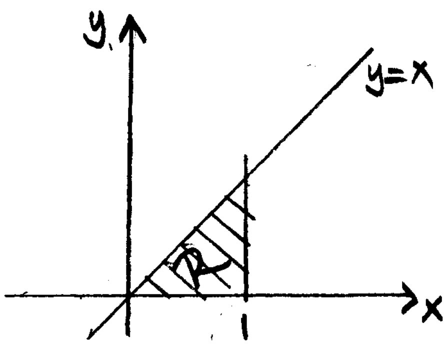
3- (a) (10P) $\int_3^5 \int_y^{2y} \frac{x}{y}\, dxdy = ?$ $\int_3^5 \left(\frac{x^2}{2} \cdot \frac{1}{y}\right]_y^{2y} dy$

$= \int_3^5 \left(\frac{4y^2}{2} - \frac{y^2}{2}\right)\frac{1}{y}\, dy$

$= \int_3^5 \frac{3y^{\cancel{2}}}{2} \cdot \frac{1}{\cancel{y}}\, dy = \frac{3}{2}\int_3^5 y\, dy = \frac{3}{2}\left(\frac{y^2}{2}\right]_3^5$

$= \frac{3}{2}\left(\frac{25}{2} - \frac{9}{2}\right) = \frac{3}{2}\left(\frac{16}{2}\right) = 3.4 = \boxed{12}$

b) (10P) $\int_0^1 \int_y^1 \sin x^2\, dxdy$ **integralini, integral sırasını değiştirerek hesaplayınız.**



$\int_0^1 \int_y^1 \sin x^2\, dx dy = \int_0^1 \int_0^x \sin x^2\, dy\, dx$

$= \int_0^1 \left(y \sin x^2\right]_0^x dx = \int_0^1 x \sin x^2\, dx.$

$\left(\begin{array}{l} u = x^2 \Rightarrow du = 2x dx \\ \qquad\quad \Rightarrow \frac{du}{2} = x dx \\ x = 0 \Rightarrow u = 0 \\ x = 1 \Rightarrow u = 1 \end{array}\right)$

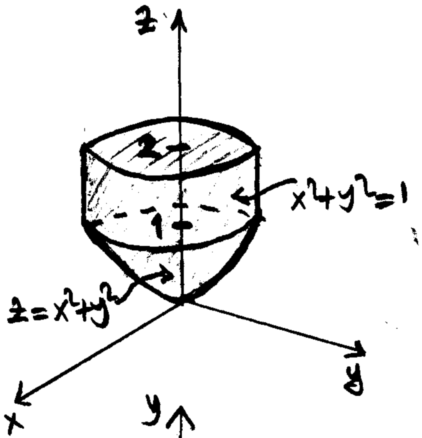
$= \frac{1}{2}\int_0^1 \sin u\, du$

$= \frac{1}{2}\left(-\cos u\right]_0^1$

$= \frac{1}{2}\left(-\cos 1 + \cos 0\right)$

$= \boxed{\frac{1}{2}\left(1 - \cos 1\right)}$

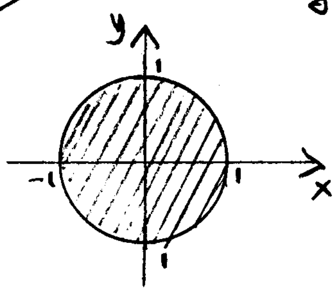
4- a) (10P) $x^2+y^2=1$ silindiri ile çevrilen, alttan $z=x^2+y^2$ paraboloidi ve üstten $z=2$ düzlemi ile sınırlı katı cismin hacmini silindirik koordinatları kullanarak bulunuz.



$$V=\iiint_R dV=\int_0^{2\pi}\int_0^1\int_{r^2}^{2} r\,dz\,dr\,d\theta=$$

$r^2\le z\le 2$
$0\le r\le 1$
$0\le\theta\le 2\pi$

silindirik koordinatlarda;
$x=r\cos\theta,\ y=r\sin\theta$
$dV=r\,dz\,dr\,d\theta.$
$x^2+y^2=r^2$



$$=\int_0^{2\pi}\int_0^1 \left(z\right]_{r^2}^{2} r\,dr\,d\theta=\int_0^{2\pi}\int_0^1(2-r^2)r\,dr\,d\theta.$$

$$=\int_0^{2\pi}\int_0^1(2r-r^3)\,dr\,d\theta=\int_0^{2\pi}\left(r^2-\frac{r^4}{4}\right]_0^1 d\theta=\int_0^{2\pi}\left(1-\frac{1}{4}\right)d\theta$$

$$=\frac{3}{4}\int_0^{2\pi}d\theta=\frac{3}{4}\cdot 2\pi=\boxed{\frac{3}{2}\pi\,br^3.}$$

b) (10P) D; $0\le x\le 1,\ 0\le y\le 1,\ 0\le z\le 1$ ile sınırlı küp olduğuna göre

$$\iiint_D (xy+xz+yz)\,dV=?$$

$$=\int_0^1\int_0^1\int_0^1(xy+xz+yz)\,dx\,dy\,dz=\int_0^1\int_0^1\left(\frac{x^2y}{2}+\frac{x^2z}{2}+xyz\right]_0^1 dy\,dz.$$

$$=\int_0^1\int_0^1\left(\frac{y}{2}+\frac{z}{2}+yz\right)dy\,dz=\int_0^1\left(\frac{y^2}{4}+\frac{z}{2}y+\frac{y^2z}{2}\right]_0^1 dz.$$

$$=\int_0^1\left(\frac{1}{4}+\frac{z}{2}+\frac{z}{2}\right)dz=\int_0^1\left(\frac{1}{4}+z\right)dz$$

$$=\left(\frac{1}{4}z+\frac{z^2}{2}\right]_0^1=\frac{1}{4}+\frac{1}{2}=\boxed{\frac{3}{4}}$$

5- a) (10P) $f(x,y,z)=2x^2z+yz$ **ise** $\nabla f=?$

$$\nabla f(x,y,z)=\frac{\partial f}{\partial x}\mathbf{i}+\frac{\partial f}{\partial y}\mathbf{j}+\frac{\partial f}{\partial z}\mathbf{k}=(4xz)\mathbf{i}+z\mathbf{j}+(2x^2+y)\mathbf{k}$$

$\mathbf{F}=4xz\mathbf{i}+z\mathbf{j}+(2x^2+y)\mathbf{k}$ **ise** $A=(0,0,0)$ **noktasını** $B=(1,1,1)$ **noktasına bağlayan düzgün bir** C **eğrisi boyunca** $\int_C \mathbf{F}\bullet dr$ **integralini hesaplayınız.**

(a) şıkkından $F=\nabla f$ olduğundan

Eğrisel İntegrallerin Temel Teoremini kullandığımızda;

$$\int_C F.dr = f(B)-f(A)=f(1,1,1)-f(0,0,0)$$
$$=2.1.1+1.1-0 = 2+1=\boxed{3} \text{ bulunur.}$$

b) (10P) Aşağıda verilen ifadelerin **doğru** ya da **yanlış** olup olmadığını belirleyiniz.

i) $\mathbf{F}$, D bölgesi üzerinde korumalı ise D bölgesi içindeki bir basit kapalı C eğrisi üzerinde

$\oint_C \mathbf{F}d\mathbf{r}=0$ dır. (DOĞRU)

ii) $\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^n=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^{n-1}}$ dir. (DOĞRU)

iii) Kutupsal koordinatlarda $dxdy=r^2drd\theta$ dır. (YANLIŞ)

iv) $\mathbf{u},\mathbf{v}$ iki vektör olmak üzere $\mathbf{u}\times\mathbf{v}=0$ **ise u** ile **v** bir birine diktir. (YANLIŞ)

v) $2x+y-z=3$ düzleminin normali $\mathbf{n}=2\mathbf{i}+\mathbf{j}-\mathbf{k}$ dır. (DOĞRU)