Öğrenci Bilgileri

Numarası

Adı Soyadı

Fakülte

Bölüm

Oturum Bilgileri

Yerleşke **Salon**

Bina **Sıra No**

Sorular

MAT-101 MATEMATİK -I DERSİ I. ARASINAVI

1	2	3	4	5	Toplam	GİRMEDİ

Sınav Süresi 90 Dakikadır.

Sorular 2. Sayfadan Başlamaktadır.

BAŞARILAR

1- a) (8P) $\dfrac{2}{|x-1|} \geq 1$ eşitsizliğini sağlayan x lerin kümesini bulunuz.

$x \neq 1$ olmalı.

$\dfrac{2}{|x-1|} \geq 1 \iff 2 \geq |x-1| \iff -2 \leq x-1 \leq 2$

$\iff -1 \leq x \leq 3 \quad (x \neq 1).$

$\therefore$ Ç.K $= \{x \in \mathbb{R} : -1 \leq x \leq 3, x \neq 1\} = [-1,1) \cup (1,3]$ olur.

b) (8P) $f(x) = \ln\left(2-\sqrt{x+1}\right)$ fonksiyonunun tanım kümesini belirleyiniz.

$x+1 \geq 0 \iff x \geq -1 \iff x \in [-1,+\infty)$

ve $2-\sqrt{x+1} > 0$ olmalı. $\iff 2 > \sqrt{x+1}$

$\iff 4 > x+1$

$\iff 3 > x$ olur $\iff x \in (-\infty, 3)$.

Buna göre

$D_f = (-\infty, 3) \cap [-1,+\infty) = [-1,3)$ bulunur.

c) (8P) $f(x) = \sin x^2$, $g(x) = \sqrt{\sin^{-1} x}$ olduğuna göre

$0 \leq x \leq 1$ için $(f \circ g)(x) = ?$ $= f(g(x)) = f\left(\sqrt{\sin^{-1} x}\right) = \sin\left(\sqrt{\sin^{-1} x}\right)^2$

$= \sin(\sin^{-1} x) = x.$

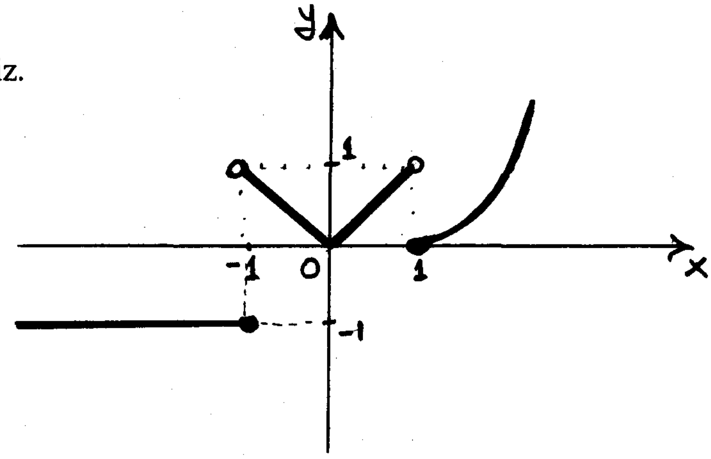
$(0 \leq x \leq 1).$

$(g \circ f)\left(\sqrt{\dfrac{\pi}{2}}\right) = ?$ $= g\left(f\left(\sqrt{\tfrac{\pi}{2}}\right)\right) = g\left(\sin\left(\sqrt{\tfrac{\pi}{2}}\right)^2\right)$

$= g\left(\sin \tfrac{\pi}{2}\right) = g(1) = \sqrt{\sin^{-1} 1} = \sqrt{\tfrac{\pi}{2}}$ bulunur.

2- $f(x)=\begin{cases} -1 & : x\le -1 \\ |x| & : -1<x<1 \\ (x-1)^2 & : 1\le x \end{cases}$ fonksiyonu veriliyor.

a) (6P) f nin grafiğini çiziniz.



b) (6P) Eğer varsa $\lim\limits_{x\to -1} f(x)$, $\lim\limits_{x\to 0} f(x)$ limitlerini bulunuz.

$\lim\limits_{x\to -1^-} f(x) = \lim\limits_{x\to -1^-}(-1) = -1 \neq \lim\limits_{x\to -1^+} f(x) = \lim\limits_{x\to -1^+} |x| = \lim\limits_{x\to -1^+}(-x) = 1$

olduğundan $\lim\limits_{x\to -1} f(x)$ yoktur.

$\lim\limits_{x\to 0^+} |x| = \lim\limits_{x\to 0^+} x = 0 = \lim\limits_{x\to 0^-} |x| = \lim\limits_{x\to 0^-}(-x) = 0$ olduğundan

$\lim\limits_{x\to 0} f(x) = \boxed{0}$ dır.

c) (6P) f nin sürekli olmadığı noktaları bulunuz. Neden bu noktalarda sürekli olmadığını belirtiniz.

f $x=-1$ ve $x=1$ de sürekli değildir.

Çünkü; $x=-1$ de ve $x=1$ de limit yoktur.

($\lim\limits_{x\to -1^-} f(x) = -1 \neq \lim\limits_{x\to -1^+} f(x) = 1 \Rightarrow$ limit yok $x=-1$ de sürekli değil.

$\lim\limits_{x\to 1^-} f(x) = 1 \neq \lim\limits_{x\to 1^+} f(x) = 0 \Rightarrow$ limit yok $x=-1$ de sürekli değil.)

d) (6P) f nin türevinin var olmadığı noktaları bulunuz. Neden bu noktalarda türevinin olmadığını belirtiniz.

$x=-1$ ve $x=1$ de f sürekli olmadığından bu noktalarda türevlenemez.

$x=0$ için $\lim\limits_{h\to 0} \dfrac{f(h)-f(0)}{h} = \lim\limits_{h\to 0} \dfrac{|h|}{h}$ limit olmadığından türev yoktur. $\left(\lim\limits_{h\to 0^+} \dfrac{|h|}{h} = 1 \neq \lim\limits_{h\to 0^-} \dfrac{|h|}{h} = -1 \right)$.

(Veya $x=0$ da grafik sivri bir köşe oluşturuyor.)

3- (a) (8P) $\lim_{x\to 0} \frac{x^2-x}{\sqrt{x+1}-1} = ?$ $\left(\left[\frac{0}{0}\right] \text{ belirsizliği var}\right).$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{(x^2-x)(\sqrt{x+1}+1)}{(\sqrt{x+1}-1)(\sqrt{x+1}+1)} = \lim_{x\to 0} \frac{x(x-1)(\sqrt{x+1}+1)}{x+\cancel{1}-\cancel{1}}$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{\cancel{x}(x-1)(\sqrt{x+1}+1)}{\cancel{x}} = \lim_{x\to 0} (x-1)(\sqrt{x+1}+1) = \boxed{-2}$$

II. yol:

$$\lim_{x\to 0} \frac{x^2-x}{\sqrt{x+1}-1} \overset{\text{L'Hosp}}{=} \lim_{x\to 0} \frac{2x-1}{\frac{1}{2\sqrt{x+1}}} = \lim_{x\to 0} (2x-1)\cdot 2\sqrt{x+1} = -1\cdot 2\sqrt{1} = \boxed{-2}$$

b) (8P) $\lim_{x\to\infty} \frac{\tan^{-1}x - \pi/2}{\cos\left(\frac{1}{x}\right)} = ?$

$$= \frac{\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{2}}{1} = \frac{0}{1} = \boxed{0}$$

$$\left(\lim_{x\to\infty} \tan^{-1}x = \frac{\pi}{2} \quad \text{ve} \quad \lim_{x\to\infty} \cos\left(\frac{1}{x}\right) \overset{(\cos \text{ sürekli})}{=} \cos\left(\underbrace{\lim_{x\to\infty}\frac{1}{x}}_{0}\right) = \cos 0 = 1.\right)$$

c) (8P) $\lim_{x\to 0^+} x^{x^2} = ?$ $\left([0^0] \text{ belirsizliği var}\right)$

$y = x^{x^2}$ diyelim $\Rightarrow \ln y = x^2 \ln x$ olur.

$$\lim_{x\to 0^+} \ln y \overset{(\ln \text{ fonk. sürekli})}{=} \ln\left(\lim_{x\to 0^+} y\right) = \lim_{x\to 0^+} x^2 \ln x \overset{([0\cdot\infty] \text{ bel.})}{=} \lim_{x\to 0^+} \frac{\ln x}{\frac{1}{x^2}}$$

$$\left(\left[\frac{\infty}{\infty}\right] \text{ bel.}\right) \overset{\text{L'Hosp}}{=} \lim_{x\to 0^+} \frac{\frac{1}{x}}{-\frac{2\cancel{x}}{x^{\cancel{4}}}} = \lim_{x\to 0^+}\left(-\frac{x^4}{2x^2}\right) = \lim_{x\to 0^+}\left(-\frac{x^2}{2}\right) = 0.$$

Böylece $\ln\left(\lim_{x\to 0^+} y\right) = 0 = \ln 1.$

$\Rightarrow \lim_{x\to 0^+} y = 1$ yani $\lim_{x\to 0^+} x^{x^2} = \boxed{1}.$

II. yol

$$\lim_{x\to 0^+} x^{x^2} = \lim_{x\to 0^+} e^{x^2 \ln x} \overset{(e^x \text{ sürekli})}{=} e^{\lim_{x\to 0^+} x^2 \ln x} = e^0 = \boxed{1}.$$

$$\left(\lim_{x\to 0^+} x^2 \ln x = 0\right).$$

4- a) (8P) $f(x)=e^{\ln(\cos^2 x)}$ fonksiyonunun grafiğine $x=\pi/4$ noktasında teğet olan doğrunun denklemini bulunuz.

$x=\frac{\pi}{4}$ için $y=f(\frac{\pi}{4})=e^{\ln(\cos^2\frac{\pi}{4})}=\cos^2\frac{\pi}{4}=(\frac{\sqrt{2}}{2})^2=\frac{1}{2}$

$f'(x)=e^{\ln(\cos^2 x)}\cdot\frac{1}{\cos^2 x}\cdot 2.\cos x.(-\sin x) \Rightarrow f'(\frac{\pi}{4})=-1$

(veya $\frac{\pi}{4}$ yakınlarında $\cos^2 x\neq 0$ olduğundan $f(x)=e^{\ln(\cos^2 x)}=\cos^2 x$ olup.
$f'(x)=2\cos x.(-\sin x) \Rightarrow f'(\frac{\pi}{4})=2.\frac{\sqrt{2}}{2}.(-\frac{\sqrt{2}}{2})=\boxed{-1}$)

Böylece; f 'nin grafiğine $x=\frac{\pi}{4}$ noktasında teğet olan doğrunun denklemi;

$y=-(x-\frac{\pi}{4})+\frac{1}{2}$ olur.

b) (8P) $\cos(xy)+x=\pi/2$ ise $\frac{dy}{dx}$ türevinin $(\pi/2,1)$ noktasındaki değerini bulunuz.

y 'x in bir fonksiyonu olmak üzere eşitliğin her iki yanının x'e göre türevi alınırsa;

$-\sin(xy)[y+xy']+1=0$ olup $x=\frac{\pi}{2}$ ve $y=1$ denklemde yerine yazılırsa;

$-\underbrace{\sin(\frac{\pi}{2})}_{1}[1+\frac{\pi}{2}.y']+1=0. \Leftrightarrow -(1+\frac{\pi}{2}y')=-1$

$\Leftrightarrow 1+\frac{\pi}{2}y'=1 \Leftrightarrow \frac{\pi}{2}y'=0 \Leftrightarrow y'=0$ olur.

$\therefore \left.\frac{dy}{dx}\right|_{(\frac{\pi}{2},1)}=0$ dır.

c) (8P) $y=\ln\left(\frac{x+1}{x}\right)$ ise $y''=?$

$y'=\frac{1}{\frac{x+1}{x}}\cdot\left(\frac{x-(x+1)}{x^2}\right)=\frac{\cancel{x}}{x+1}\cdot\frac{-1}{x\cancel{x}}$

$=\frac{-1}{x^2+x}$

$y''=-\frac{-(2x+1)}{(x^2+x)^2}=\frac{2x+1}{(x^2+x)^2}$ bulunur.

5- a) (14P) Aşağıda verilen ifadelerin **doğru** yada **yanlış** olup olmadığını belirleyiniz.

(i) $\ln(x+y)=\ln x+\ln ny$ (YANLIŞ)

(ii) $\log_8 16 = 4/3$ (DOGRU)

(iii) $f(x)=\dfrac{2x+1}{x-5}$ ise $f^{-1}(x)=\dfrac{x-5}{2x+1}$ **dir.** (YANLIŞ)

(iv) $x>0$ **için** $\tanh(\ln x)=\dfrac{x^2-1}{x^2+1}$ dir. (DOGRU)

(v) f, IR üzerinde çift fonksiyon ise tersi yoktur. (DOGRU)

(vi) $\sqrt{x^2}=\left(\sqrt{x}\right)^2$ (YANLIŞ)

(vii) $\dfrac{d}{dx}\sec hx=-\sec hx\tanh x$ (DOGRU)

b) (10P) $f(x)=\frac{1}{4}x^4-\frac{2}{3}x^3-\frac{3}{2}x^2$ fonksiyonu veriliyor.

f nin **artan** ve **azalan** olduğu aralıkları belirleyiniz.

$$f'(x)=\frac{1}{4}\cdot 4\cdot x^3-\frac{2}{3}\cdot 3x^2-\frac{3}{2}\cdot 2x$$

$$=x^3-2x^2-3x = x(x^2-2x-3) = x(x-3)(x+1)=0$$

$\Leftrightarrow$ $x=0$ veya $x=3$ veya $x=-1$

f fonksiyonu;

$(-\infty,-1)\cup(0,3)$ de azalan

$(-1,0)\cup(3,+\infty)$ da artandır.

x		-1		0		3	
x	$-$		$-$		$+$		$+$
$x-3$	$-$		$-$		$-$	0	$+$
$x+1$	$-$	0	$+$		$+$		$+$
$f'(x)$	$-$ ↘		$+$ ↗		$-$ ↘		$+$ ↗