

ZORUNLU ORTAK SERVİS DERSLERİ
MAT-102/ MATEMATİK -II DERSİ
2016-2017 BAHAR DÖNEMİ ARA SINAVI

ADI ve SOYADI :

NUMARASI :

BÖLÜMÜ :

İMZA :

24.03.2017

1	2	3	4	5	TOPLAM

Sınav Süresi 90 Dakikadır.

BAŞARILAR

1-a) (10P) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\ln(n^2+n)}{3n-1} = ?$ $\left[\frac{\infty}{\infty} \right]$ belirsizliği var.

2'Hosp.

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n^2+n} \cdot (2n+1) = \frac{1}{3} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n+1}{n^2+n}$$

$$= \frac{1}{3} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n \left(2 + \frac{1}{n} \right)}{n^2 \left(1 + \frac{1}{n} \right)}$$

$$= \frac{1}{3} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2 + \frac{1}{n}}{n \cdot \left(1 + \frac{1}{n} \right)} = \boxed{0}$$

b) (10P) $\sum_{n=1}^{\infty} \left[\frac{3}{2^{n-1}} - \left(\frac{1}{4} \right)^n \right]$ serisi yakınsak mıdır? Yakınsak ise değerini bulunuz.

$$= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{3}{2^{n-1}} - \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{4} \right)^n$$

$a=3, |r| = \left| \frac{1}{2} \right| < 1$ old. yak.

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3}{2^{n-1}} = \frac{3}{1 - \frac{1}{2}} = \frac{3}{\frac{1}{2}} = \boxed{6}$$

$a = \frac{1}{4}, |r| = \left| \frac{1}{4} \right| < 1$ old. yak.

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{4} \right)^n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{4} \cdot \left(\frac{1}{4} \right)^{n-1} = \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{1 - \frac{1}{4}} = \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{\frac{3}{4}} = \frac{1}{4} \cdot \frac{4}{3} = \boxed{\frac{1}{3}}$$

Buna göre,

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3}{2^{n-1}} - \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{4} \right)^n = 6 - \frac{1}{3} = \frac{18-1}{3} = \boxed{\frac{17}{3}}$$

2- a) (10P) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x+1)^n}{5^n}$ serisinin yakınsaklık yarıçapını ve yakınsaklık aralığını bulunuz.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{\frac{(x+1)^{n+1}}{5^{n+1}}}{\frac{(x+1)^n}{5^n}} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{5^n \cdot (x+1)^{n+1}}{5^{n+1} \cdot (x+1)^n} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{5^n (x+1)^n \cdot (x+1)}{5^n \cdot 5 \cdot (x+1)^n} \right|$$

$$= \frac{|x+1|}{5} < 1 \text{ olmalı.}$$

$$\Leftrightarrow |x+1| < 5 \Leftrightarrow -5 < x+1 < 5 \Leftrightarrow -6 < x < 4$$

$x = -6$ için

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-6+1)^n}{5^n} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n \cdot 5^n}{5^n} = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \text{ İraksaklık.}$$

$x = 4$ için

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(4+1)^n}{5^n} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{5^n}{5^n} = \sum_{n=1}^{\infty} 1 \text{ İraksaklık.}$$

serinin yakınsaklık aralığı $(-6, 4)$



Yakınsaklık yarıçapı $R = 5$ dir.

b) (10P) $\sum_{n=0}^{\infty} x^n$ kuvvet serisinden yararlanarak $f(x) = \frac{1}{1 - \frac{x^2}{4}}$ fonksiyonunun kuvvet

serisini uygun aralıkta bulunuz.

$$|x| < 1 \Leftrightarrow -1 < x < 1 \text{ için } \sum_{n=0}^{\infty} x^n = 1 + x + x^2 + \dots + x^n + \dots = \frac{1}{1-x}$$

olduğunu biliyoruz.

x yerine $\frac{x^2}{4}$ yazarsak

$$\left| \frac{x^2}{4} \right| < 1 \Leftrightarrow x^2 < 4 \Leftrightarrow -2 < x < 2 \text{ olur. Şu halde.}$$

bu aralıkta

$$\sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{x^2}{4} \right)^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n}}{4^n} = 1 + \frac{x^2}{4} + \frac{x^4}{4^2} + \dots + \frac{x^{2n}}{4^n} + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{x^2}{4} \right)^n$$

$$= \frac{1}{1 - \frac{x^2}{4}} \text{ olur.}$$

3- Uzayda $P = (1, 0, 2)$, $Q = (-1, -1, 3)$, $R = (2, 0, 1)$ noktaları veriliyor.

(a) (10P) \vec{PQ} ve \vec{PR} vektörleri arasındaki açıyı bulunuz.

$$\vec{PQ} = (-1-1)\mathbf{i} + (-1-0)\mathbf{j} + (3-2)\mathbf{k} = -2\mathbf{i} - \mathbf{j} + \mathbf{k}$$

$$\vec{PR} = (2-1)\mathbf{i} + (0-0)\mathbf{j} + (1-2)\mathbf{k} = \mathbf{i} - \mathbf{k}$$

$$\vec{PQ} \cdot \vec{PR} = |\vec{PQ}| |\vec{PR}| \cos \theta$$

$$\Rightarrow \theta = \cos^{-1} \left(\frac{\vec{PQ} \cdot \vec{PR}}{|\vec{PQ}| |\vec{PR}|} \right) = \cos^{-1} \left(\frac{-3}{\sqrt{6} \cdot \sqrt{2}} \right)$$

$$\vec{PQ} \cdot \vec{PR} = -2 + 0 - 1 = -3$$

$$|\vec{PQ}| = \sqrt{(-2)^2 + (-1)^2 + 1^2} = \sqrt{6}$$

$$|\vec{PR}| = \sqrt{1^2 + (-1)^2} = \sqrt{2}$$

$$\Rightarrow \theta = \cos^{-1} \left(\frac{-3}{\sqrt{6} \cdot \sqrt{2}} \right) = \cos^{-1} \left(\frac{-3}{\sqrt{12}} \right) = \cos^{-1} \left(\frac{-3}{2\sqrt{3}} \right) = \cos^{-1} \left(-\frac{\sqrt{3}}{2} \right)$$

b) (10P) \vec{PQ} ve \vec{PR} vektörlerine dik bir birim vektör bulunuz.

\vec{PQ} ve \vec{PR} ye dik olan vektör $\vec{PQ} \times \vec{PR}$ dir.

$$\vec{PQ} \times \vec{PR} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ -2 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 0 & -1 \end{vmatrix} \mathbf{i} + \begin{vmatrix} -2 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} \mathbf{j} + \begin{vmatrix} -2 & -1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} \mathbf{k}$$

$$= \mathbf{i} - (2-1)\mathbf{j} + \mathbf{k} = \mathbf{i} + \mathbf{j} + \mathbf{k}$$

\vec{PQ} ve \vec{PR} vektörüne dik birim vektör ise.

$$\frac{\vec{PQ} \times \vec{PR}}{|\vec{PQ} \times \vec{PR}|} = \frac{\mathbf{i} + \mathbf{j} + \mathbf{k}}{\sqrt{1+1+1}} = \frac{1}{\sqrt{3}} \mathbf{i} + \frac{1}{\sqrt{3}} \mathbf{j} + \frac{1}{\sqrt{3}} \mathbf{k} \text{ olur.}$$

4- a) (10P) $2x - 3y + 5z = 17$ düzlemine paralel olan ve $P = (3, -1, 2)$ noktasından geçen düzlemin denklemini bulunuz.

Burada düzlemin normali $n = 2i + 3j + 5k$ dir.

Buna göre istenen denklem;

$$2(x-3) - 3(y+1) + 5(z-2) = 0$$

$$\Rightarrow 2(x-3) - 3(y+1) + 5(z-2) = 0$$

$$\Rightarrow 2x - 3y + 5z - 6 - 3 - 10 = 0$$

$$\Rightarrow 2x - 3y + 5z = 19$$

$$\Rightarrow \boxed{2x - 3y + 5z = 19}$$

b) (10P) $r(t) = \cos t i + 2t j - e^{2t} k$ olduğuna göre

$$\int_0^{\pi} r(t) dt = ?$$

$$\int_0^{\pi} r(t) dt = \left(\int_0^{\pi} \cos t dt \right) i + \left(\int_0^{\pi} 2t dt \right) j + \left(\int_0^{\pi} -e^{2t} dt \right) k.$$

$$= \left(\sin t \Big|_0^{\pi} \right) i + \left(t^2 \Big|_0^{\pi} \right) j + \left(\frac{-e^{2t}}{2} \Big|_0^{\pi} \right) k.$$

$$= \left(\sin \pi - \sin 0 \right) i + \left(\pi^2 - 0 \right) j + \left(\frac{-e^{2\pi}}{2} + \frac{1}{2} \right) k.$$

$$= \boxed{\pi^2 j + \frac{1}{2} (1 - e^{2\pi}) k.}$$

5- (20P) Aşağıda verilen ifadelerin **doğru** ya da **yanlış** olup olmadığını belirleyiniz.

a) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n+1}{1-3^n}$ serisi yakınsaktır. (YANLIŞ)

b) $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} + \frac{z^2}{16} = 1$ denklemi bir paraboloid belirler. (YANLIŞ)

c) $\mathbf{u} = \mathbf{i} + 2\mathbf{j} - 3\mathbf{k}$ ve $\mathbf{v} = 2\mathbf{i} + 2\mathbf{j} + 2\mathbf{k}$ vektörleri birbirine diktir. (DOĞRU)

d) $x = 1 + 2t$, $y = -1 + t$, $z = t$ doğrusu $(1, -1, 0)$ noktasından geçer. (DOĞRU)

e) $\lim_{n \rightarrow \infty} 3\left(\frac{1}{2}\right)^n = 0$ dır. (DOĞRU)

f) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n}$ serisi mutlak yakınsaktır. (YANLIŞ)

g) $\lim_{k \rightarrow \infty} \sum_{n=1}^k a_n = 3$ ise $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = 3$ tür. (DOĞRU)

h) Her $n = 1, 2, 3, \dots$ için $0 \leq a_n \leq b_n$ olmak üzere $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ ıraksak ise $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ serisi de ıraksaktır. (YANLIŞ)

i) Yakınsak her dizi sınırlıdır. (DOĞRU)

j) $y = 3$ doğrusunun kutupsal koordinatlardaki denklemi $r \cos \theta = 3$ dür. (YANLIŞ)